$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \qquad 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \qquad 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$\frac{1}{2}$ ist das inverse der Multiplikation zu 2

neutrale Element der Multiplikation

$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad b \cdot \frac{1}{b} = 1 \qquad c \cdot \frac{1}{c} = 1 \qquad d \cdot \frac{1}{d} = 1$

$1/a$ ist das inverse der Multiplikation zu a

$\frac{1}{a} \cdot a = 1$ wegen Kommutativgesetz

$$b \cdot x = a \quad | :b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{b}$$

mit anderen Worten, $\frac{a}{b}$ ist die Lösung der Gleichung

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

$$\boxed{\frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}}$$

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

Behauptung

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

$$b \cdot \frac{1}{b} \cdot a = a$$

$$1 \cdot a = a \Leftrightarrow a = a \quad \checkmark$$

neutrales Element d. Multip.

Rechenregeln Bruchrechnung

Multiplikation

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

$$b \cdot d \cdot x = a \cdot c \quad | : b \cdot d$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$b \cdot d \cdot \boxed{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}} = a \cdot c$$

Ist die Lösung vorstehender Gleichung

Behauptung

$$b \cdot d \cdot \boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = a \cdot c$$

$$b \cdot \boxed{\frac{a}{b}} \cdot d \cdot \boxed{\frac{c}{d}} = a \cdot c$$

$$\boxed{b \cdot \frac{1}{b}} \cdot a \cdot \boxed{d \cdot \frac{1}{d}} \cdot c = a \cdot c$$

$$\uparrow 1 \qquad \downarrow 1$$

$$a \cdot c = a \cdot c \ \checkmark$$

Erweitern eines Bruches / Kürzen eines Bruches

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \boxed{d \cdot \frac{1}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$$

neutrale Element Multiplikation

$\longrightarrow$ Erweitern

$\longleftarrow$ Kürzen

Addition zweier Brüche

Nenner ist identisch

$$\boxed{\frac{a}{b}} + \boxed{\frac{c}{b}} + \boxed{\frac{d}{b}} = \boxed{\frac{1}{b} \cdot a} + \boxed{\frac{1}{b} \cdot c} + \boxed{\frac{1}{b} \cdot d}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot (a + c + d)$$

$$= \frac{a + c + d}{b}$$

Addition zweier Brüche

Nenner sind verschieden

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$$

erweitert mit dem Nenner des zweiten Bruchs

erweitert mit dem Nenner des ersten Bruches

$$= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Division zweier Brüche:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Warum ist das so?

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \underbrace{\frac{b}{b}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{d}{d}}_{1} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot b \cdot d} = \frac{a \cdot \overbrace{\frac{1}{b} \cdot b}^{1} \cdot d}{c \cdot \underbrace{\frac{1}{d} \cdot d}_{1} \cdot b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{xy-2y}{x-2} - \left(\frac{3x-6}{x-2}\right) =$$

$$\frac{xy-2y - (+3x-6)}{x-2}$$

$$\frac{(xy-2y) - 3x + 6}{x-2} \leftarrow \text{Tipp}$$

$$\frac{y(x-2) - 3\cdot(+x-2)}{x-2}$$

...

$$\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(y-3)}{\cancel{(x-2)}}$$

Ende

$$\frac{18xy}{9x^2-9y^2}+\frac{3x-3y}{3x+3y}=$$

$$\frac{18xy}{9x^2-9y^2}+\frac{(3x-3y)(3x-3y)}{(3x+3y)(3x-3y)}$$

$$\frac{\cancel{18xy}+9x^2\cancel{-18xy}+9y^2}{9x^2-9y^2}=\frac{9x^2+9y^2}{9x^2-9y^2}=\frac{\cancel{9}(x^2+y^2)}{\cancel{9}(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$3x+3y=$

$9x^2-9y^2=(3x-3y)(3x+3y)$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 3.B.F

2.B.F

$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$

$=(a-b)(a-b)$

$$\frac{18xy}{9x^2-9y^2}+\frac{3x-3y}{3x+3y}=\frac{\overset{2}{\cancel{18}}\cdot x\cdot y}{\underset{1}{\cancel{9}}\cdot(x^2-y^2)}+\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot(x-y)}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot(x+y)}=$$

$$\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{2xy}{(x+y)\cdot(x-y)}+\frac{x-y}{x+y}=$$

$$\frac{2xy}{(x+y)\cdot(x-y)}+\frac{(x-y)\cdot(x-y)}{(x+y)\cdot(x-y)}=\frac{2xy+(x-y)\cdot(x-y)}{(x+y)\cdot(x-y)}$$

$$\frac{\overset{=0}{\cancel{2xy}}+x^2-\overset{=0}{\cancel{2xy}}+y^2}{(x+y)\cdot(x-y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$\frac{ax+by+bx+ay}{ax-by+bx-ay} = \frac{ax+bx+ay+by}{ax+bx-ay-by}$$

$$= \frac{x(a+b)+y(a+b)}{x\cdot(a+b)-y(a+b)}$$

$$= \frac{(x+y)(a+b)}{(a+b)(x-y)}$$

$$= \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot (x^2-y^2) \cdot \frac{2}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y)}{(\cancel{x-y})} \cdot (\cancel{x-y})(\cancel{x+y}) \cdot \frac{2}{(\cancel{x+y})}$$

$$= (x+y) \cdot 2$$

2)

$$\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}+\frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}-2\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=$$

$$\frac{(x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)-2\cdot(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=$$

$$\frac{(x+y)^2+(x-y)^2-2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=$$

$$\frac{x^2+\cancel{2xy}+y^2+x^2-\cancel{2xy}+y^2-2x^2-2y^2}{x^2-y^2}=$$

$$\frac{0}{x^2-y^2}=0$$

3)

$$\frac{\frac{m}{n}-\frac{m-n}{m+n}}{1+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{m+n}} = \frac{\frac{m\,(m+n)}{n\,(m+n)}-\frac{(m-n)\cdot n}{(m+n)\cdot n}}{\frac{n\cdot(m+n)}{n\cdot(m+n)}+\frac{m\,(m-n)}{n\,(m+n)}} = \frac{\frac{m\,(m+n)-(m-n)\cdot n}{n\,(m+n)}}{\frac{n\cdot(m+n)+m\,(m-n)}{n\,(m+n)}}$$

$$= \frac{m\,(m+n)-\boxed{(m-n)\,n}}{n\cdot\cancel{(m+n)}}\cdot\frac{\cancel{n}\cdot(m+n)}{n\cdot(m+n)+m\,(m-n)}$$

$$= \frac{m^2+mn-mn+n^2}{mn+n^2+m^2-mn} = \frac{m^2+n^2}{m^2+n^2}$$

$$= 1$$

4.1

$$\frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-3)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x+3+x^2+2x-3x-6}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x^2-3}{x^2-4}$$

1. Summand + 2. Summand

Minuend - Subtrahend

1. Faktor · 2. Faktor

Dividend : Divisor

4.2

$$\frac{2x}{2x+1} - \frac{2x-1}{2x}$$

$$\frac{2x \cdot 2x}{(2x+1)2x} - \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x(2x+1)} =$$

$$= \frac{4x^2 - (4x^2 - 1)}{(2x+1) \cdot 2x}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{(2x+1) \cdot 2x}$$

$$= \frac{1}{(2x+1)2x} \quad //$$

4.3. $$\frac{4ab}{2a^2-2b^2}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{4ab}{2(a^2-b^2)}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{\cancel{4}^{2}ab}{\cancel{2}(a-b)(a+b)}+\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}+\frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{\cancel{2ab}+a^2\cancel{-ab}\cancel{-ab}+b^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$