Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 7: Graphentheorie

Referenzen zum Nacharbeiten:

Iwanowski / Lang 7
Beutelspacher 8.1-8.5
Meinel 11
Steger 2
zur Vertiefung: Aigner 6, 7 (7.4: Algorithmus von Dijkstra)
Matousek 3, 4, 5 (3.5: Algorithmus für Eulerwege)

7. Graphentheorie

7.1 Terminologie und Repräsentation

Definition:

Ein Graph (V,E) ist ein Gebilde aus Ecken (Knoten, *vertices*) und Kanten (*edges*): Eine Kante verbindet immer 2 Ecken. Diese Ecken sind die *Endpunkte* der Kante.

Darstellung in der Ebene:

- Die Ecken werden als Punkte in der Ebene markiert.
- Die Kanten sind Kurvensegmente (in der Regel Strecken), welche zwischen ihren Endpunkten verlaufen.
- Die Darstellung eines Graphen ist nicht eindeutig.

Isomorphie oder: Wann gelten 2 Graphen als gleich ?

2 Graphen gelten als gleich (äquivalent, isomorph), wenn sie aus gleich vielen Ecken und Kanten bestehen und eine bijektive Abbildung besteht, so dass die zugeordneten Ecken durch die zugeordneten Kanten miteinander verbunden sind.

7. Graphentheorie

7.1 Terminologie und Repräsentation

Weitere Begriffe:

- Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein.
  Gerichtete Kanten werden auch ***Bögen*** (*arcs*) genannt.
  Graphen mit ausschließlich ungerichteten Kanten heißen ***ungerichtete Graphen***,
  Graphen mit gerichteten Kanten heißen ***Digraphen*** (*directed Graphs*).

- adjazente (benachbarte) Ecken

- inzidente (anliegende) Ecken und Kanten

- Schlingen, Mehrfachkanten

__Einfache__ (schlichte) __Graphen__ haben keine Schlingen oder Mehrfachkanten.

- Grad (Valenz) einer Ecke

- Zusammenhang, Zusammenhangskomponenten, isolierte Ecken

7. Graphentheorie

7.1 Terminologie und Repräsentation

Darstellung von Graphen im Computer:

- **Adjazenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Ecken i und j durch eine Kante verbunden sind, sonst 0.

- **Adjazenzliste:**
  In Zeile i stehen die Nummern aller Ecken, die durch eine Kante mit Ecke i verbunden sind.

- **Inzidenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Kante i als Endpunkt die Ecke j hat, sonst 0.
  In den Zeilen dürfen auch die Ecken und in den Spalten die Kanten stehen.

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

<u>Eulerwege</u>

Definition *Eulerweg (Eulerzug)*:

Weg, der alle Kanten im Graphen genau einmal durchläuft

Definition *Eulerkreis*:

Geschlossener Eulerweg (gleiche Anfangs- und Endecke)

Definition *Eulerscher Graph*:

Graph mit einem Eulerkreis

Satz: Ein Graph ist eulersch $\Leftrightarrow$ G ist zusammenhängend
und jede Ecke hat gerade Valenz

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Eulerwege

Algorithmus zum Auffinden eines Eulerkreises in einem zusammenhängenden Eulerschen Graphen:

- Beginne mit einer beliebigen Ecke v_0 und dem leeren Weg $W_0 = (v_0)$.
- Wiederhole:

  Erweitere den Weg $W_i = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i)$
  zu einem Weg $W_{i+1} = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i, e_{i+1}, v_{i+1})$ um eine Kante e_{i+1},
  die an der letzten Ecke v_i von W_i beginnt,
  sodass der Restgraph R_{i+1}, der aus G entsteht, indem alle Kanten aus W_{i+1}
  und alle daraufhin isolierten Ecken aus G entfernt werden,
  zusammenhängend ist und weiterhin die Ecke v_0 enthält.
  (d.h. die Wegnahme von e_{i+1} darf die Ecke v_0 nicht isolieren
  und muss die noch nicht gewählten Kanten zusammenhängend lassen)

  bis das nicht mehr möglich ist.

Satz: Der vom Algorithmus erzeugte Weg W_k enthält alle Kanten von G,
d.h. W_k ist ein Eulerkreis.

Frage: Wie prüft man nach, ob ein Graph zusammenhängend ist ?

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Eulerwege

Algorithmus zum Auffinden eines Eulerweges in einem zusammenhängenden Graphen mit 2 Ecken ungerader Valenz:

- Die Ecken ungerader Valenz seien v_a und v_e.
  Beginne mit der Ecke v_a und dem leeren Weg $W_0 = (v_a)$. (Nur der Beginn bei v_e wäre auch noch möglich)
- Wiederhole:
  Erweitere den Weg $W_i = (v_a, e_1, v_1, ..., v_{i-1}, e_i, v_i)$
  zu einem Weg $W_{i+1} = (v_a, e_1, v_1, ..., v_{i-1}, e_i, v_i, e_{i+1}, v_{i+1})$ um eine Kante e_{i+1},
  die an der letzten Ecke v_i von W_i beginnt,
  sodass der Restgraph R_{i+1}, der aus G entsteht, indem alle Kanten aus W_{i+1}
  und alle daraufhin isolierten Ecken aus G entfernt werden,
  zusammenhängend ist und weiterhin die Ecke v_e enthält.
  (d.h. die Wegnahme von e_{i+1} darf die Ecke v_e nicht isolieren
  und muss die noch nicht gewählten Kanten zusammenhängend lassen)

  bis das nicht mehr möglich ist.

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Hamiltonwege

Definition *Hamiltonweg*:

Weg, der alle Ecken im Graphen genau einmal durchläuft

Definition *Hamiltonkreis*:

Geschlossener Hamiltonweg (gleiche Anfangs- und Endecke)

Definition *Hamiltonscher Graph*:

Graph mit einem Hamiltonkreis

Problem: Es ist kein effizienter Algorithmus zum Auffinden eines Hamiltonkreises bekannt. ☹

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Bewertete Graphen

Definition *Bewerteter (gewichteter, weighted) Graph*:

Graph, dessen Kanten mit Gewichten bewertet sind (den Kantenlängen)

Anmerkung: Bewertete Graphen können auch gerichtet sein.

Darstellung eines bewerteten Graphen im Computer:

- **Adjazenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht die Kantenlänge, wenn die Ecken i und j durch eine Kante verbunden sind, sonst ∞.

- **Adjazenzliste:**
  In Zeile i stehen die Paare (Eckennummer, Kantenlänge) aller Ecken, die durch eine Kante mit Ecke i verbunden sind.

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Algorithmus von Dijkstra (Kürzeste Wegeberechnung)

Voraussetzung: Alle Kantenlängen müssen nichtnegativ sein.

Ziel: Es soll der Weg mit der minimalen Kantenlänge von A nach B gefunden werden.

Algorithmus:

- In der Menge **`Berechnet`** sei nur die Ecke A. Markiere A mit Weglänge 0.
  In der Menge **`Vorläufig`** sind alle anderen Ecken des Graphen.
  Markiere die Nachbarn N von A mit der Länge der Kante von A nach N
  und alle anderen Ecken mit Weglänge ∞.
- Wiederhole:
  Wähle die Ecke V aus **`Vorläufig`** mit der kleinsten Markierung
  und verschiebe sie in die Menge **`Berechnet`**.
  Betrachte alle Nachbarn N von V aus **`Vorläufig`**:
  Ersetze die Markierung von N durch das Minimum seiner bisherigen Markierung
  und der Summe der Markierung von V plus der Länge der Kante von V zu N.

  bis V = B

7. Graphentheorie

7.2 Wege in Graphen

Algorithmus von Dijkstra (Kürzeste Wegeberechnung)

Satz: Die Markierungen aller Ecken V der Menge **`Berechnet`** entsprechen der Länge des kürzesten Wegs von A nach V.

Erweiterung zur *Ausgabe* des kürzesten Wegs:

- Wiederhole:
  Wähle die Ecke V aus **`Vorläufig`** mit der kleinsten Markierung
  und verschiebe sie in die Menge **`Berechnet`**.
  Betrachte alle Nachbarn N von V aus **`Vorläufig`**:
  Ersetze die Markierung von N durch das Minimum seiner bisherigen Markierung und der Summe der Markierung von V plus der Länge der Kante von V zu N.
  Falls die Markierung aktualisiert werden muss, mache V zum **Vorgänger** von N.
  bis V = B

- Sammle nacheinander alle Vorgänger von B bis A auf
  und gib den Weg in umgekehrter Reihenfolge wieder aus.

Satz: Der Algorithmus von Dijkstra berechnet nicht nur den kürzesten Weg von A nach B, sondern auch alle kürzesten Wege von A zu allen anderen Ecken, die näher an A sind als B.

7. Graphentheorie

7.3 Bäume

Definition *Baum*:

Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

Definition *Wald*:

Ein Wald ist ein Graph ohne Kreise (nicht notwendig zusammenhängend)

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- G ist ein Baum.
- G ist ein Graph ohne Kreise mit maximal vielen Kanten
(d.h. beim Hinzufügen einer beliebigen Kante entsteht immer ein Kreis).
- G ist ein zusammenhängender Graph mit n-1 Kanten
(wobei n die Eckenzahl des Graphen ist).
- G ist ein kreisfreier Graph mit n-1 Kanten
(wobei n die Eckenzahl des Graphen ist).

7. Graphentheorie

7.3 Bäume

Definition *Aufspannender Baum (Gerüst)*:

Ein Aufspannender Baum (Gerüst) eines Graphen ist ein Teilgraph, der selbst ein Baum ist und alle Ecken des ursprünglichen Graphen enthält.

Konstruktion eines aufspannenden Baums für einen beliebigen Graphen G:

- Beginne mit dem leeren Wald W, bestehend aus keiner Kante.
- Wiederhole für alle Kanten e_1, e_2, ..., e_m des Graphen G (Reihenfolge beliebig):

  Untersuche, ob e_i zu W hinzugefügt werden kann,
  sodass W weiterhin kreisfrei bleibt:

  Falls ja, füge e_i zu W hinzu.

  bis W aus n-1 Kanten besteht (n sei die Anzahl der Ecken von G).

Satz: Der so konstruierte Wald W ist ein aufspannender Baum für G.

7. Graphentheorie

7.3 Bäume

Definition *Minimaler Aufspannender Baum*:

Ein Minimaler Aufspannender Baum eines gewichteten Graphen ist ein spannender Baum, dessen Gesamtkantenlänge minimal ist.

Algorithmus von Kruskal:

Konstruktion eines minimalen aufspannenden Baums für ein beliebiges G:

- Beginne mit dem leeren Wald W, bestehend aus keiner Kante.
- Wiederhole für alle Kanten e_1, e_2, ..., e_m des Graphen G (Reihenfolge sortiert):
  Untersuche, ob e_i zu W hinzugefügt werden kann,
  sodass W weiterhin kreisfrei bleibt:
  Falls ja, füge e_i zu W hinzu.
  bis W aus n-1 Kanten besteht (n sei die Anzahl der Ecken von G).

Satz: Der so konstruierte Wald W ist ein minimaler aufspannender Baum für G.

7. Graphentheorie

7.3 Bäume

Definition *Wurzelbaum*:

- Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als Wurzel ausgezeichnet ist.
- Das *Niveau (Suchtiefe) eines Knotens* ist die Länge des Weges zur Wurzel.
- Die *Tiefe (Höhe) eines Wurzelbaums* ist das maximale Niveau seiner Knoten.
- Die Nachbarn eines Knoten, die auf einem größerem Niveau liegen als dieser, heißen *Kinder* dieses Knoten.
- Der (eindeutige) Nachbarn eines Knoten, der auf einem niedrigeren Niveau liegt als dieser, heißt *Elternteil* dieses Knoten.
- Ein *Blatt* ist ein Knoten ohne Kinder.

Wurzelbäume mit maximaler Kinderzahl:

- Ein binärer *Wurzelbaum* ist ein Wurzelbaum, in dem alle Knoten maximal 2 Kinder haben.
- Ein ternärer *Wurzelbaum* ist ein Wurzelbaum, in dem alle Knoten maximal 3 Kinder haben.
- Ein d-ärer *Wurzelbaum* ist ein Wurzelbaum, in dem alle Knoten maximal d Kinder haben.

Satz: Ein d-ärer Wurzelbaum mit n Blättern hat mindestens Tiefe $\log_d n$

7. Graphentheorie

7.4 Planare Graphen

Definition *Planarer Graph*:

Graph, der in der Ebene so dargestellt werden *kann*,
dass sich seine Kanten nicht überkreuzen.

(Beutelspacher nennt das plättbaren Graphen.
Planare Graphen sind bei ihm Graphen, die mit dieser Eigenschaft dargestellt *sind*.)

Definition *Gebiet (Land)*:

Ein Gebiet eines planaren Graphen zu einer *gegebenen kreuzungsfreien Darstellung in der Ebene* ist eine maximale Fläche in der Ebene,
in der je zwei Punkte durch eine Kurve verbunden werden können,
die keine Kante des Graphen schneidet.

Ein Gebiet wird häufig durch die Angabe der Begrenzungskanten charakterisiert
(„Nadeln“ werden mitgezählt).
Diese Charakterisierung ist nicht immer eindeutig, d.h. manche Gebiete haben dieselben Begrenzungskanten.

7. Graphentheorie

7.4 Planare Graphen

Satz: Die Charakterisierung aller Gebiete durch die Angabe der Begrenzungskanten hängt von der Darstellung des Graphen ab.

Satz: Die Anzahl der Gebiete hängt *nicht* von der Darstellung des Graphen ab:

$$n - m + g = 2$$

Eulersche Polyederformel für zusammenhängende Graphen

$$n - m + g = 1 + z$$

Eulersche Polyederformel für Graphen mit z Zusammenhangskomponenten

7. Graphentheorie

7.4 Planare Graphen

<u>Wie erkennt man an der Struktur, dass ein Graph planar ist ?</u>

Def.: Der ***vollständige Graph K_n*** ist der Graph mit n Ecken, die paarweise miteinander durch eine Kante verbunden sind.

Def.: Der ***vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$*** ist der Graph mit zwei Mengen aus n bzw. m Ecken, sodass jede Ecke der einen Menge mit jeder Ecke der anderen Menge durch eine Kante verbunden ist.

Satz: K_n ist planar genau dann, wenn $n \leq 4$.

Satz: $K_{n,m}$ ist planar genau dann, wenn $\min\{n,m\} \leq 2$.

Satz von Kuratowski:

Ein Graph ist planar genau dann, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.

Def: Eine Unterteilung eines Graphen entsteht durch Einfügen von zusätzlichen Ecken in bestehende Kanten.

7. Graphentheorie

7.5 Färbungen

Def.: Eine *zulässige Färbung eines Graphen* ist die Zuweisung von Zahlen aus einer endlichen Menge (den „Farben“) an die Ecken des Graphen derart, dass zwei benachbarte Ecken nie die gleiche Farbe haben.

Def.: Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die notwendig sind, um G zulässig zu färben.

4-Farben-Satz:

Für jeden planaren Graphen gilt: $\chi(G) \leq 4$ (*Four colors suffice!*)

ca. 1850:	Vermutung durch britischen Mathematikstudenten Francis Guthrie
1879:	„Beweis“ durch Alfred Kempe
1890:	Finden des Fehlers im „Beweis“ von Kempe durch Percy Heawood
20. Jahrhundert:	4-Farben-Vermutung als Anstoß vieler neuer Entwicklungen in der Graphentheorie
ca. 1965:	Vorbereitung eines Computerbeweises durch H. Heesch, kein Geld für Computer
1976:	Computerbeweis durch K. Apel und W. Haken aufbauend auf Ideen von Heesch

7. Graphentheorie

7.5 Färbungen

Was hat unsere Definition von $\chi(G)$ mit Landkarten zu tun ?

Def.: Zu einem planaren Graphen G mit kreuzungsfreier Darstellung wird der *duale Graph D* definiert als folgender Graph:
i) Ersetze jedes Gebiet von G in D durch eine Ecke
ii) Verbinde zwei Ecken in D durch eine Kante genau dann, wenn die zugehörigen Gebiete in G durch eine Kante benachbart sind.
Hierbei wird für jede Kante einer Gebietsgrenze in G eine eigene Kante zwischen den zugehörigen Ecken in D gezogen (was unter Umständen Mehrfachkanten erzeugt).

Satz:
i) Der duale Graph zu einem planaren Graphen ist wieder planar und immer zusammenhängend.
ii) Wenn der Graph zusammenhängend ist, gilt:
Der duale Graph eines dualen Graphen ist wieder der Graph selbst.
Aus i) und ii) folgt:
Jeder planare Graph kann auch als dualer Graph aufgefasst werden. Damit ist jede Eckenfärbung eines planaren Graphen G auch die Landkartenfärbung eines anderen planaren Graphen und umgekehrt.

4-Farben-Satz:

Für jede Landkarte gilt: Sie kann mit 4 Farben immer so gefärbt werden, dass zwei durch eine eindimensionale Grenze benachbarte Länder niemals die gleiche Farbe haben.

7. Graphentheorie

7.5 Färbungen

Einige Schranken für die (ecken-) chromatische Zahl:

Definition: Ein bipartiter Graph ist ein Graph mit zwei Eckenmengen M und N, sodass die Kanten nur eine Ecke von M mit einer Ecke von N verbinden, aber es gibt keine Kanten zwischen den Ecken von M oder zwischen den Ecken von N. Jeder bipartite Graph ist also ein Subgraph von einem $K_{m,n}$ (dem vollständigen bipartiten Graph zwischen m bzw. n Ecken).

Satz: Für jeden bipartiten Graphen G gilt: $\chi(G) = 2$.

Korollar: Die Umkehrung des 4-Farben-Satzes gilt *nicht*:
Wenn $\chi(G) \leq 4$, dann könnte G trotzdem nicht planar sein.

Satz: Wenn G einen K_n als Teilgraph enthält, dann gilt: $\chi(G) \geq n$.

Achtung: Auch hier gilt *nicht* die Umkehrung:
Wenn $\chi(G) \geq n$, muss G nicht K_n als Teilgraph enthalten.

Beispiele:

i) Ein ungerader Kreis braucht immer 3 Farben, auch wenn er nicht K_3 enthält.

ii) Ein Graph mit einer Ecke, deren Nachbarn einen ungeraden Kreis bilden, braucht immer 4 Farben, auch wenn er nicht K_4 enthält.