Name: Tutor:

Diskrete Mathematik SS 2020

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski, Cordula Eichhorn

Übungsblatt 09 (8 Aufgaben)

fhwedel UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1

Demonstrieren Sie an einem Beispiel, dass die Definition von $\oplus$ und $\odot$ für $\mathbb{Z}_6$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten für die Restklasse ist.

Aufgabe 2

Finden Sie von folgenden Elementen das additiv und multiplikativ Inverse (falls es existiert). Geben Sie das gesuchte Element in normierter Darstellung an (also als Repräsentanten zwischen 0 und $n-1$).

a) 12 in $\mathbb{Z}_{21}$

b) 21 in $\mathbb{Z}_{12}$

c) 8 in $\mathbb{Z}_{13}$

d) 13 in $\mathbb{Z}_8$

Aufgabe 3

a) Geben Sie die Verknüpfungstabelle für $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ an.

b) Finden Sie außer der Gruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ weitere drei Gruppen mit 6 Elementen vom Typ $(\mathbb{Z}_n^*, \odot_n)$. Geben Sie deren 6 Elemente jeweils explizit an.

   Welche sind zueinander isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Tipp: Die Eulersche Phi-Funktion gibt zu einer Zahl n an, wie viele kleinere Zahlen zu ihr teilerfremd sind. Falls Sie die Lösung zu dieser Aufgabe nicht durch Ausprobieren finden wollen, fragen Sie doch mal bei Wolfram Alpha nach ein paar Werten dieser Phi-Funktion.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Verknüpfungstafel:

$\odot$	1	2	3	4
1	1	3	2	4
2	4	2	3	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Zeigen Sie, dass diese Struktur keine Gruppe ist, obwohl in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt. Geben Sie an, welche Gesetze verletzt sind.

Hinweis: Es gilt, dass jede Halbgruppe, in der in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt, eine Gruppe ist. Was folgt daraus für dieses Beispiel?

Zusatz: Konstruieren Sie ein ähnliches Beispiel (also mit denselben Eigenschaften wie hier) mit 3 Elementen.

Aufgabe 5

Zeigen Sie die Gültigkeit der 4. Zeile der Tabelle für die Funktionengruppe $\mathbb{Q}_6$ aus 6 Elementen mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung, indem Sie die Zwischenwerte explizit aufschreiben.

Hinweis: Hierdurch bekommen Sie eine gute Übung im Bruchrechnen.

Aufgabe 6

Zeigen Sie in $\mathbb{Q}_6$ an einem Bespiel die Gültigkeit des Assoziativgesetzes.

Aufgabe 7

Geben Sie für die folgenden Elemente bezüglich der komponentenweisen Addition ihre Ordnung und die inversen Elemente an. Weisen Sie Ihre Behauptung durch Zwischenrechnungen nach!

a) $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{Z}_5^4$

b) $(1, 2, 3, 0, 1) \in \mathbb{Z}_4^5$

Zusatzaufgabe für Systematiker: Geben Sie die Ordnung einer Gruppe der Form $\mathbb{Z}_n^r$ in Abhängigkeit von n und r an und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8

Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung f zwischen $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Q}_6, \circ)$:

a) Legen Sie das Bild für 2 Spiegelungen fest[1]:

$$f(\sigma_l) = \frac{1}{x}$$

$$f(\sigma_r) = 1 - x$$

Bestimmen Sie die eindeutigen Funktionswerte der anderen Elemente von S_3, damit f ein Isomorphismus ist.

b) Geben Sie für $f(\rho_1)$ und $f(\rho_2)$ andere Funktionswerte an, als in a) vorgeschrieben, sodass aber immer noch die Ordnungszahlen für die Funktionswerte erhalten bleiben. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall dann kein Isomorphismus mehr ist.

c) Legen Sie als Bilder für 2 Spiegelungen fest:

$$f(\sigma_l) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(\sigma_r) = \frac{x-1}{x}$$

Warum kann f in diesem Fall nicht zu einem Isomorphismus erweitert werden?

[1] Wie in der Vorlesung gezeigt, sind 2 Spiegelungen erzeugende Elemente von S_3