Aufgabe 1

Beweisen Sie für ganze Zahlen:

a) $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(n_1 + n_2)$

b) $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(n_1 - n_2)$

Aufgabe 2

Belegen Sie den allgemeinsten Quersummensatz aus der Vorlesung mit Beispielen für Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit von n für die angegebene Zahlenbasis b (es soll jeweils dieselbe Basis b für alle Teiler eines Aufgabenteils verwendet werden):

a) für $b = 9$, $n = 44$ und die Teiler 2, 4, 8

b) für $b = 16$, $n = 25$ und die Teiler 3 und 5

Aufgabe 3

Karin ist 25 Jahre alt und ihre Mutter 52. Die Ziffern des Lebensalters der beiden sind also dieselben. Karin fragt sich, ob das noch einmal passieren kann und ob sich immer zwischen 2 Menschen ereignen kann, dass das Alter des einen die Vertauschung der Ziffern des anderen ist. Sie nennt das eine **Zahlendreherverwandtschaft** für Lebensalter, die zweistellig dargestellt werden (einstellige also mit einer führenden Null davor). Sie überlegt sich, was die einzelnen Ziffern für das Gesamtalter bedeuten, und kommt zu folgendem Ergebnis:

a) Damit 2 Menschen eine Zahlendreherverwandtschaft haben können, ist es eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Altersunterschied in Jahren zwischen den beiden durch 9 teilbar ist und maximal 81 Jahre beträgt.

b) Das erste Ereignis einer Zahlendreherverwandtschaft zwischen 2 Menschen, welche die Bedingung in a) erfüllen und mehr als ein Jahr auseinander liegen, tritt auf, wenn die ältere Person ihr bei der Geburt der jüngeren Person erreichtes Lebensjahrzehnt vollendet und die jüngere Person den Geburtstag erreicht hat, der für die Zahlendreherverwandtschaft benötigt wird. Von dann an ergibt sich eine Zahlendreherverwandtschaft alle 11 Jahre, bis die ältere Person kein zweistelliges Alter mehr hat.

Beweisen Sie die beiden Ergebnisse. Formulieren Sie b) um für Menschen, die an ganzen Lebensjahren gleich alt sind.

Herausforderung: Verallgemeinern Sie dier Erkenntnis von Karin für die Darstellung des Lebensalters in einer beliebigen Zahlenbasis b, die nicht notwendigerweise 10 beträgt. Kann man dann durch Wahl einer geeigneten Zahlenbasis eine Zahlendreherverwandtschaft zwischen 2 beliebigen Menschen herstellen?

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils (i) a DIV b sowie (ii) a MOD b:

a) $a = -25, b = 8$

b) $a = -25, b = -8$

c) $a = 25, b = -8$

d) $a = 25, b = 8$

Aufgabe 5

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

$$199, 697, 1501, 2383$$

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von n und m mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für $n = 204795$ und $m = 31.365$.

Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m an.

Versuchen Sie zusätzlich, ggT und kgV mit dem Schulalgorithmus über die Primzahlzerlegung zu bestimmen.
Wer die Faktorisierung nicht alleine herausbekommt, sollte es mit der mathematischen Suchmaschine `www.wolframalpha.com` und der Frage $factor(x)$ versuchen. Alternativ geht es natürlich auch mit Maxima, das Sie sich von der Webseite `intern.fh-wedel.de/~iw/lv/ss-2020/dm/vorlesungsmaterial/` herunterladen können.

Aufgabe 7[1]

Installieren Sie Maxima und laden Sie die Datei Primfaktorzerlegung von der Webseite. Vergleichen Sie für große Zahlen den Abstand zwischen einer Primzahl und ihrem Nachfolger mit der logarithmischen Abschätzung aus der Vorlesung. Was fällt Ihnen auf? Sie können alternativ versuchen, diese Aufgabe mit Hilfe von Wolfram Alpha zu lösen.

Aufgabe 8

Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_5$ als Mengen in Elementschreibweise an. Benutzen Sie für die nach beiden Seiten unendlichen Mengen die informelle Pünktchennotation.
Variante für Profis: Schreiben Sie die Mengen exakt in Prädikatenschreibweise auf.

[1]nicht klausurrelevant