Name: Tutor:

Diskrete Mathematik SS 2020

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski, Cordula Eichhorn

Übungsblatt 07 (6 Aufgaben) Seite 1/2

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz durch vollständige Induktion über n:

Wenn eine Landkarte dadurch gebildet wird, dass n beliebige Geraden in die Ebene gelegt werden, dann kann man die dadurch entstehenden Länder mit 2 Farben zulässig färben.

Aufgabe 2

Gegeben:
Wir werden die folgende Aussage mit vollständiger Induktion beweisen:
Seien $g_1, \ldots, g_n$ verschiedene Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind ($n \geq 2$), dann haben alle diese Geraden einen Punkt gemeinsam.

Beweis:

1) Für $n = 2$ ist die Aussage wahr, denn je 2 nichtparallele Geraden schneiden sich.

2) Angenommen, die Aussage gilt für n. Seien nun $n + 1$ Geraden $g_1, \ldots, g_{n+1}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n dieser Geraden (also $g_1, g_2, \ldots g_n$) einen gemeinsamen Punkt: nennen wir ihn einmal x. Genauso haben auch die n Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_{n+1}$ einen Punkt gemeinsam: wir nennen ihn y. Die Gerade g_1 liegt in beiden Gruppen und enthält also sowohl x als auch y. Das trifft auch auf g_{n-1} zu. Nun schneiden sich aber g_1 und g_{n-1} in einem eindeutigen Punkt, also muss $x = y$ sein. Deshalb haben alle Geraden $g_1, \ldots, g_{n+1}$ einen gemeinsamen Punkt, nämlich x.

Frage: Was ist falsch an diesem Beweis? [1]

Aufgabe 3

Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis:

Satz: Alle Zahlen n sind gleich.

Beweis: Die Behauptung gelte bis zur Zahl n, also auch $n = n - 1$.
Das ist äquivalent zu: $n + 1 = n$ (Addition von 1 auf beiden Seiten). Damit ist gezeigt, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt. *q.e.d.*

[1] Diese Aufgabe stammt aus Kapitel 1.3 des Lehrbuchs von Matousek/Nesetril. Das Lesen des gesamten Kapitels ist empfehlenswert.

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt. Achten Sie dabei, die erforderliche Implikationskette in der richtigen Reihenfolge aufzuschreiben. Hierfür dürfen alle aus der Schule bekannten Regeln für Gleichungs- und Ungleichungsumformungen angewandt werden.

a) Für reelle Zahlen x mit $0 < x < 1$ gilt: $x^2 < x$

b) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ kann es keine andere Lösung geben als $x = -5$.

c) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ ist $x = -5$ eine gültige Lösung.

d) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen x und y liegt immer eine weitere rationale Zahl.
Hinweis: Nehmen Sie für Ihren Beweis an, dass $x < y$ gilt, konstruieren Sie eine Zahl, die dazwischen liegt, und weisen Sie das nach.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgende Aussage indirekt:

Es gibt keine kleinste ganze Zahl.

Begründen Sie, warum Ihr Beweis nicht für natürliche Zahlen gültig ist.

Aufgabe 6

Bei der Fußball-EM 2020 hätte es 24 Teams gegeben mit je 23 Kaderspielern, von denen aber gleichzeitig nur 11 auf dem Platz spielen.
Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie jeweils Ihre Antwort:

a) Gibt es zwei EM-Teilnehmer, welche am selben Tag Geburtstag haben? Unterscheidet sich die Antwort, wenn man von jedem Team nur die erste Startaufstellung[2] und nicht alle Kaderspieler betrachtet?

b) Gibt es in einem Team zwei Spieler, die im selben Monat Geburtstag haben? Macht es hier einen Unterschied, wenn man nur die erste Startaufstellung und nicht den Kader betrachtet?

c) Die teilnehmenden Spieler sind zwischen 16 und 40 Jahre alt. Kann mit dieser Information garantiert werden, dass es in jedem Team mindestens 2 an Jahren gleich alte Spieler gibt?

d) Wenn man die Spieler aus allen Kadern berücksichtigt, welches ist die maximale Zahl n, von der man weiß, dass auf jeden Fall mindestens n Spieler im selben Monat Geburtstag haben? Warum ist die tatsächliche Zahl vermutlich größer?

[2] Die Spieler, welche beim ersten Spiel ihres Landes bei Anpfiff auf dem Platz spielen