Name: Tutor:

Diskrete Mathematik SS 2020

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski, Cordula Eichhorn

Übungsblatt 06 (9 Aufgaben) Seite 1/3

fhwedel
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1

[1] Betrachten Sie die folgenden Aussagen und Begriffe und ordnen Sie ein, was eine Definition, was ein Satz, was ein Axiom und was ein Beweis ist[2]:

a) Eine Boolesche Algebra ist eine Menge mit 3 Operationen und dem Kommutativgesetz, Distributivgesetz, Eigenschaft der neutralen Elemente und Eigenschaft der inversen Elemente.

b) In einer Booleschen Algebra wie in a) beschrieben gilt das Distributivgesetz.

c) Die deMorganschen Regeln lauten:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

d) Die deMorganschen Regeln gelten in einer Booleschen Algebra.

e) Die Teiler-Algebra T_n besteht aus den Teilern der Zahl n sowie 3 Operationen darauf.

f) Die Teiler-Algebra T_n ist eine Boolesche Algebra, wenn n keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

g) T_{60} ist keine Boolesche Algebra, denn die Eigenschaft vom inversen Element ist verletzt.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie eine endliche Menge, die alle Peano-Axiome bis auf P4 erfüllt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\sum_{i=0}^{n} (2^i) = 2^{n+1} - 1$$

[1] Diese Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe 6 vom vorigen Übungsblatt

[2] Zum Teil können Sie pro Teilaufgabe mehrere Zuordnungen machen.

Aufgabe 4

Beweisen Sie: $n!$ ist eine gerade Zahl für $n >= 2$.

Hinweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar und erfordert keine besondere Rechnung. Diese Aufgabe dient nur dazu, dass Sie sich vergewissern können, das Prinzip der vollständigen Induktion verstanden zu haben.

Aufgabe 5

Benennen Sie mit $A(n)$ die Aussage, dass es für die natürliche Zahl $n > 1$ eine Primzahlzerlegung gibt. Benennen Sie für folgende Zahlen m genau die Kette von Beweisschritten, wie man von $A(2)$ nach $A(m)$ gelangt, wobei als Beweisschritt ausschließlich der in der Vorlesung gezeigte allgemeine Induktionsschluss verwendet werden darf:

Beispiel: $m = 84$
Lösung:

$$\begin{array}{rl} A(2) & \text{direkt} \\ A(2) & \Rightarrow A(4) \\ A(3) & \text{direkt} \\ A(3) \wedge A(4) & \Rightarrow A(12) \\ A(7) & \text{direkt} \\ A(7) \wedge A(12) & \Rightarrow A(84) \end{array}$$

a) $m = 9$

b) $m = 24$

c) $m = 64$

d) $m = 100$

Hinweis: Die Kette ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Es reicht aus, jeweils eine Kette anzugeben. Falls Sie zwischendurch eine Primzahl p haben, dann gilt $A(p)$ direkt wie in der Induktionsverankerung aus der Vorlesung. Für Nichtprimzahlen müssen Sie gemäß dem Induktionsschluss aus der Vorlesung von einer Zerlegung in genau 2 Faktoren ausgehen.

Aufgabe 6

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Wenn n Leute bei einer Geburtstagsfeier mit Sekt anstoßen und jeder mit seinem Glas das Glas jedes anderen genau einmal berührt, dann gibt es insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ Gläserkontakte.

Tipp für den Induktionsschluss: Überlegen Sie sich, wie viele Gläserkontakte hinzukommen, wenn ein neuer Gast hinzukommt, und berechnen Sie dann die Anzahl aller Gläserkontakte unter Verwendung der Induktionsannahme.

Aufgabe 7

Finden Sie heraus, wie viele Vorfahren die n-te Vorfahrensgeneration eines Menschen enthält und beweisen Sie das mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 8

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

F_i ist hier die i-te Fibonaccizahl.

Aufgabe 9

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in Varname \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \beta\alpha & \text{für } \alpha \in \{a, b, c, \ldots, z\}, \beta \in \{A, B, C, \ldots, Z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta & \\ \vec{x} = \alpha\vec{y}\beta & \text{für } \vec{y} \in Varname \end{cases}$$

a) Geben Sie Beispiele für Wörter an, die nach dieser Regel gebildet werden können.

b) Beweisen Sie folgende Behauptung mit vollständiger Induktion: Die Anzahl der Kleinbuchstaben ist gleich der Anzahl der Großbuchstaben.
Hinweis: Benutzen Sie als Induktionsvariable n die Länge des *Varnamens* und überlegen Sie sich, ab welchem Wert für n die Behauptung gilt.