Name: Tutor:

**Diskrete Mathematik** SS 2020

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski, Cordula Eichhorn

**Übungsblatt 05** (6 Aufgaben) 

fhwedel UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

## Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $N = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Geben Sie eine Funktion $M \to N$ an, die nicht bijektiv ist.

b) Können Sie wenigstens eine der beiden Eigenschaften, also die Injektivität oder die Surjektivität erhalten, und nur nur die jeweils andere Eigenschaft verletzen, oder sind Sie gezwungen, beide Eigenschaften zu verletzen?

c) Gegeben eine Funktion $g : A \to B$, die injektiv ist, aber nicht bijektiv. Was können Sie über $A$ oder $B$ aussagen?

## Aufgabe 2

Illustrieren Sie die beiden Distributivgesetze für Mengen durch schraffierte Venn-Diagramme.

## Aufgabe 3

Geben Sie alle Elemente der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 1$ an!

## Aufgabe 4

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 3$:

$\mathfrak{B} = \{f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

$$\begin{array}{rlcl}
\text{i)} & \sim f(x1, x2, x3) & = & 1 - f(x1, x2, x3) \\
\text{ii)} & (f \oplus g)(x1, x2, x3) & = & max\{f(x1, x2, x3), g(x1, x2, x3)\} \\
\text{iii)} & (f \bullet g)(x1, x2, x3) & = & min\{f(x1, x2, x3), g(x1, x2, x3)\}
\end{array}$$

a) Schreiben Sie ein Element dieser Booleschen Algebra als Funktion in Mengendarstellung auf.

b) Wählen Sie ein weitere Element aus (das nicht in Mengendarstellung aufgeschrieben werden muss, sondern einfacher dargestellt werden darf) und weisen Sie für dieses Element und das Element aus a) eine der deMorganschen Regeln nach.

Hinweis: Zeigen Sie das Gesetz für alle 8 verschiedenen Argumente der Schaltfunktionen! Es sind also insgesamt 16 Werte auszurechnen (linke und rechte Seite). Geben Sie jeweils die Zwischenwerte an!

## Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass in der Teiler-Algebra für $n = 105$ beide Distributivgesetze für die Elemente 3, 5 und 15 erfüllt sind.

b) Demonstrieren Sie die beiden deMorganschen Regeln an den Elementen 3 und 15.

c) Zeigen Sie, dass die Ergebnisse von a) und b) auch für $n = 60$ gelten. Warum ist die zugehörige Teiler-Algebra dennoch keine Boolesche Algebra? Zeigen Sie konkret, welches Axiom der Booleschen Algebren hier verletzt ist!

## Aufgabe 6

Betrachten Sie die folgenden Aussagen und Begriffe und ordnen Sie ein, was eine Definition, was ein Satz, was ein Axiom und was ein Beweis ist[1]:

a) Eine Boolesche Algebra ist eine Menge mit 3 Operationen und dem Kommutativgesetz, Distributivgesetz, Eigenschaft der neutralen Elemente und Eigenschaft der inversen Elemente.

b) In einer Booleschen Algebra wie in a) beschrieben gilt das Distributivgesetz.

c) Die deMorganschen Regeln lauten:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

d) Die deMorganschen Regeln gelten in einer Booleschen Algebra.

e) Die Teiler-Algebra $T_n$ besteht aus den Teilern der Zahl $n$ sowie 3 Operationen darauf.

f) Die Teiler-Algebra $T_n$ ist eine Boolesche Algebra, wenn $n$ keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

g) $T_{60}$ ist keine Boolesche Algebra, denn die Eigenschaft vom inversen Element ist verletzt.

[1] Zum Teil können Sie pro Teilaufgabe mehrere Zuordnungen machen.