Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge $M = \{\{a\}, \{b\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}\}$.

Bilden Sie die Relation $\{(x, y) \in M \times M \mid x \subseteq y\}$. Zeigen Sie, dass es sich hier um eine Ordnungsrelation handelt und zeichnen Sie das zugehörige Hassediagramm. Kennzeichnen Sie zusätzlich die maximalen und minimalen Elemente.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Menge M aller Paare von Noten:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} :$$

Hierbei stehe das erste Element eines Paares für die Note im Fach Analysis und die zweite für die Note im Fach Diskrete Mathematik.
Auf M sei die Ordnungsrelation R_M definiert als:

$$R_M = \{((ana_1, dm_1), (ana_2, dm_2)) \in M \times M : (ana_1 \geq ana_2) \wedge (dm_1 \geq dm_2)\}$$

a) Zeigen Sie, dass R_M keine totale Ordnungsrelation ist.

b) In einem bestimmten Jahrgang kam nur die Teilmenge T von M vor, in der die Noten aller Paare sich um mindestens 2 unterschieden. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von R_T und kennzeichnen Sie die minimalen und maximalen Elemente.

c) Ist R_T überhaupt eine Ordnungsrelation? Geben Sie eine Begründung an!

d) Als Menge M' soll nun statt der Notenpaare die Menge der Studierenden genommen werden: Ein Studierender steht zu einem anderen in einer Relation $R_{M'}$, wenn seine beiden Klausurnoten gemäß der oben angegebenen Relation R_M höchstens genauso gut wie die des anderen sind.

   Begründen Sie, warum $R_{M'}$ keine Ordnungsrelation ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Betrachten Sie die Relation $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$

a) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation (partiell oder total) ist.

b) Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen oder das Hasse-Diagramm an.

c) Begründen Sie, warum R keine Funktion ist, und geben Sie eine Teilmenge von R an, die eine Funktion ist.

Aufgabe 4

Gegeben seien folgende Mengen und Relationen:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$R_1 = \{a, 2); (c, 3)\} \quad \subseteq A \times B$$

$$R_2 = \{(1, a); (1, b); (1, c); (1, d); (1, e)\} \quad \subseteq B \times A$$

$$R_3 = \{(a, 1); (b, 2); (c, 3); (d, 2); (e, 2)\} \quad \subseteq A \times B$$

a) Bilden Sie:

$$R_4 = R_1 \circ R_2$$
$$R_5 = R_2 \circ R_1$$
$$R_6 = R_3 \circ R_2$$
$$R_7 = R_2 \circ R_3$$

b) Geben Sie für jede der 7 Relationen an, ob sie eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie ferner an, welche der 7 Relationen injektiv bzw. linkseindeutig und welche surjektiv bzw. rechtsvollständig ist.

d) Bilden Sie für alle 7 Relationen die Inverse. Ist eine der Relationen eine umkehrbare Funktion?

Aufgabe 5

Gegeben sind drei Grundmengen

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$N = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definieren Sie zwei Relationen $R_1 \subset M \times N$ und $R_2 \subset N \times P$ so, dass wenigstens eine der beiden keine Funktion ist aber die Komposition $R_2 \circ R_1$ trotzdem eine Funktion ist.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-5\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2}{(x+5)}$

b) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^{(x+5)}$

c) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot (x+5)$

Hinweis: Sie müssen das nicht zwangsläufig durch Termumformungen untersuchen, sondern dürfen auch andere Argumente heranziehen.

Aufgabe 7

Gegeben sei eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ nach dem Cantorschen Diagonalverfahren.

a) Schreiben Sie die ersten 20 Elemente auf!

b) Bestimmen Sie die Indizes n mit $F(n) = x$ für $x = \frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{2}, 2$