QUARTERNIONEN

Quaternionen und ihre Anwendungen in der Computergrafik

Seminar zur Vertiefung und Anwendung
Marco Broese

Übersicht

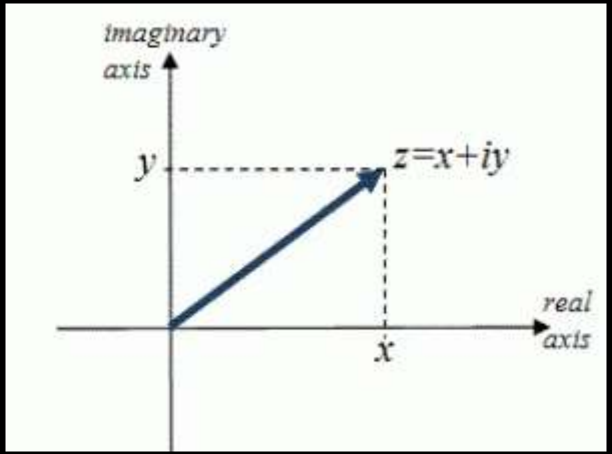
- Geschichte
- Mathematische Grundlagen
- Quaternionen
- Euler Rotation (mit Demo)
- Rotationsquaternionen (mit Demo)
- LERP/SLERP (mit Demo)
- Fazit

Motivation

Interpretation von komplexen Zahlen

- Komplexe Zahlen können als Punkt in einer Ebene dargestellt werden (2D)

$$z = x + i\ y$$



Interpretation für 3D

- Ansatz Tripel : $t = x + iy + jz$ mit $\mathrm{x, y, z} \in \ \mathbb{R}$
- Multiplikation ist nicht abgeschlossen:

$$t_1 * t_2 = t$$

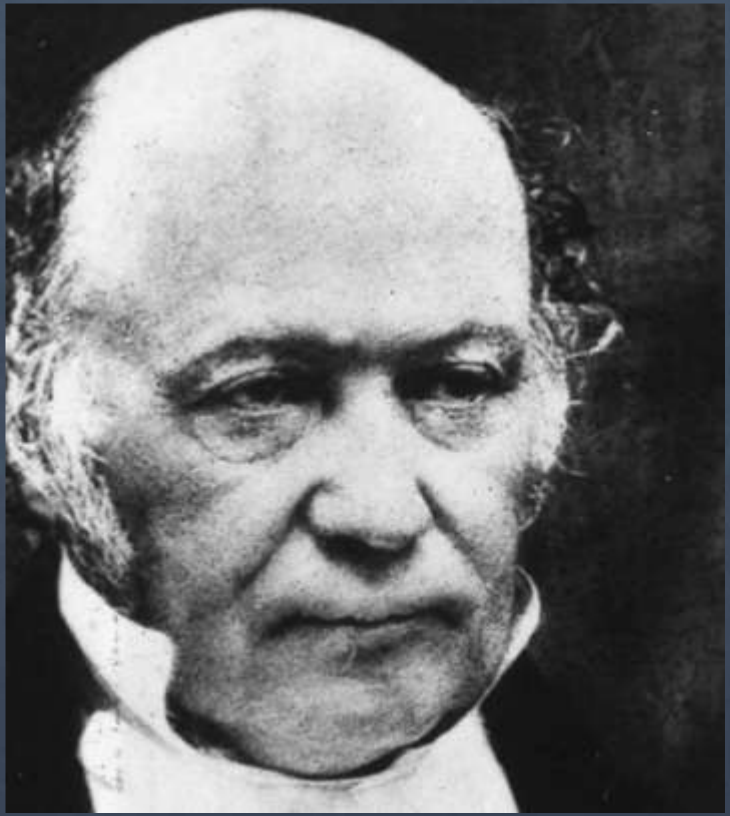
$$ij = x + iy + jz$$

$$\ldots$$

$$0 = (xz - y) + i(x + yz) + j(z^2 + 1)$$

$$xz - y = x + yz = z^2 + 1 = 0$$

$$aber\ z^2 + 1\ \neq 0$$



Geschichte

- Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)
- Ursprung: Nutzbarmachung von komplexen Zahlen im 3D-Raum
- Viele Jahre vergeblich versucht Problem mit nur 2 imaginären Teilen zu lösen
- Kinder fragten:” Well, Papa can you multiply triplets? ”

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- Entdeckung seiner Regeln am 16.Oct 1843

Geschichte

- Fürchtete zu Kollabieren
- Erstes Werk über Quaternionen „Lectures on Quaternions“ (1864)
- Ablehnung von Quaternionen zugunsten von Euler Winkeln
- Neue Technologien führten zu einer Wiederentdeckung der Quaternionen

Mathematische Grundlagen

Körper Axiome

Ein Körper besteht aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei binären Verknüpfungen „+“ und „$*$“

	Addition	**Multiplikation**
Assoziativität	$a + (b + c) = (a + \mathrm{b}) + \mathrm{c}$	$a * (b * c) = (a * \mathrm{b}) * c$
Neutrales Element	$0 + a = a \mid 0 \in \mathbb{K}$	$1 * a = a * 1 = a \mid 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Inverse	$(-a)\ mit\ (-a) + a = 0$	$a^{-1}\ mit\ a^{-1} * a = 1$
Distributivgesetz	$a * (b + c) = a * b + a * c$ und	$(a + b) * c = a * c + b * c$
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a * b = b * a$

Ein Schiefkörper besitzt alle Eigenschaften eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

Mathematische Grundlagen

2D Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3D Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4D Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

4D Punktprodukt

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + w_1 w_2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{mit x, y, z, w} \in \mathbb{R}$$

Weglassen von Thermen erzeugt Punktprodukt für 2D bzw. 3D

3D Kreuzprodukt

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{mit x, y, z} \in \mathbb{R}$$

Essenziell für die Quaternionen Multiplikation

Einheitsvektor

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{||a||}$$

Einheitsvektor ist das Resultat, wenn ein Vektor (2D, 3D, 4D) durch seine Norm (=Betrag) geteilt wird.

Quaternionen

Quaternionen

Die Menge der Quaternionen wird dargestellt durch:
$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \{(w, x, y, z) | w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Alternative Darstellungen:
$q = w + i\,x + j\,y + k\,z$ mit q ∈ $\mathbb{H}$

Oder:

$$q = \left[w, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \; bzw. \; q = [s, \vec{v}]$$

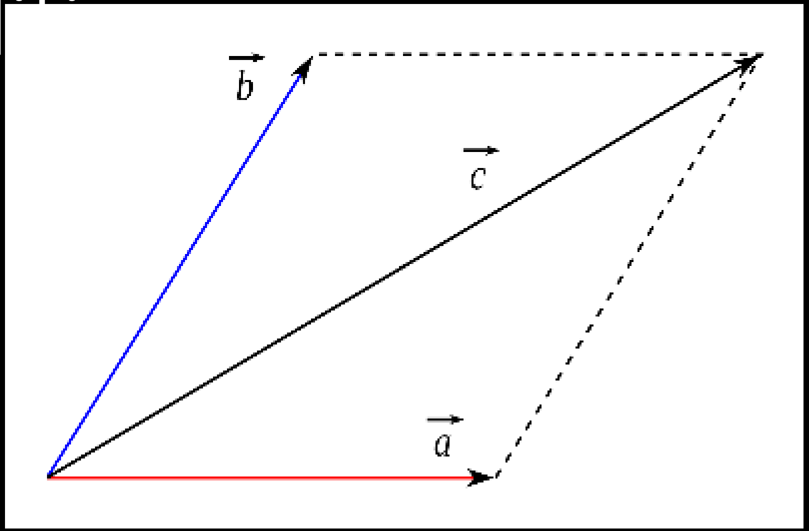
Mit s ∈ $\mathbb{R}$ als Realteil (Re(q)) und $\vec{v}$ ∈ $\mathbb{R}^3$ als Imaginärteil (Im(q)).

Hamilton - Regeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

*	**1**	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Quaternionen Addi



Komponentenweise Addition:

$$q_1 + q_2 = (w_1 + w_2) + i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)$$

Die Additionsgesetze ergeben sich aus denen von $\mathbb{R}$, somit ergeben sich folgende Axiome:

- Assoziativität bzgl. Addition
- Kommutativität bzgl. Addition
- Neutrales Element bzgl. Addition: $(0,0,0,0) + a = a$
- Inverses Element bzgl. Addition: $-a = (-w, -x, -y, -z)$, sodass $-a + a = 0$

Quaternionen Multiplikation

Die Multiplikation wird durch eine komponentenweise Multiplikation und der Hamilton-Regel realisiert:

$$
\begin{aligned}
q_1 * q_2 &= (w_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1) * (w_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) \\
&= w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\
&\quad +i(w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2) \\
&\quad +j(w_1y_2 - x_1z_2 + y_1w_2 + z_1x_2) \\
&\quad +k(w_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1w_2)
\end{aligned}
$$

Alternative Schreibweise: $q_1 = [s, v], \qquad q_2 = [s', v']$

$$q_1 * q_2 = [ss' - \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}', s\mathrm{v}' + s'\mathrm{v} + v \times v']$$

Quaternionen Multiplikation

- **Assoziativität** bzgl. Multiplikation: $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \mathbf{b}) * \boldsymbol{c}$

➢ Beweis durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Hamilton Regeln

➢ Beweis durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung des Quaternion $\mathbf{q} = \left[\mathbf{1}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right]$

- **Neutrales Element** $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\mathbf{1} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} * \mathbf{1} = \boldsymbol{a}$

Quaternionen Multiplikation

Das konjungierte Quaternion ist definiert als:

$$\bar{q} = w - ix - jy - kz$$

Die Norm ist definiert als:

$$\begin{aligned} ||q|| &= q * \bar{q} = (w + ix + jy + kz) * (w - ix - jy - kz) \\ &= w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Definition **inverses Element** :

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{||q||}$$

Für Einheitsquaternionen können wir daraus folgern, dass:

$$q^{-1} = \bar{q}$$

Somit gibt es ein inverses Element bzgl. der Multiplikation.

Quaternionen Multiplikation

- Nichtkommutativität der Multiplikation basiert auf den Hamilton Regeln
- Kommutativität der Multiplikation: $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Sei $q1 = i$ und sei $q2 = j$.
Dann gilt für die Multiplikation aus den Hamilton Regeln:

$$q1 * q2 = ij \neq ji = q2 * q1$$

Quaternionen Distributivgesetz

- **Distributivgesetz**: $a * (b + c) = a * b + a * c$ und $(a + b) * c = a * c + b * c$

➢ Beweis durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Hamilton Regeln

Schiefkörper

	Addition	Multiplikation
Assoziativität	$a + (b + c) = (a + \mathrm{b}) + \mathrm{c}$	$a * (b * c) = (a * \mathrm{b}) * c$
Neutrales Element	$0 + a = a \mid 0 \in \mathbb{K}$	$1 * a = a * 1 = a \mid 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Inverse	$(-a)\ mit\ (-a) + a = 0$	$a^{-1}\ mit\ a^{-1} * a = 1$
Distributivgesetz	$a * (b + c) = a * b + a * c$ und $(a + b) * c = a * c + b * c$	
Kommutativität	$a + b = b + a$	$a * b = b * a$

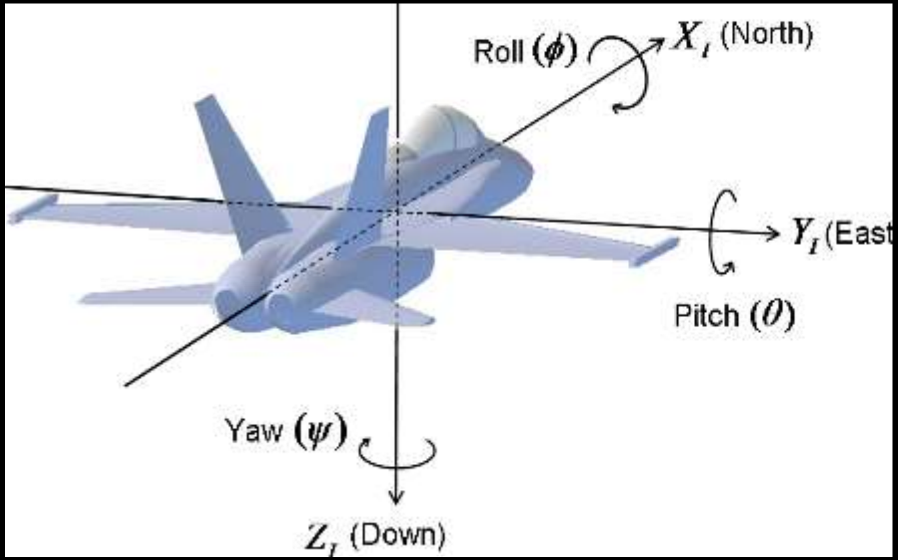
$\Rightarrow$ Quaternionen bilden einen Schiefkörper.

Euler Rotationen

Euler Rotation

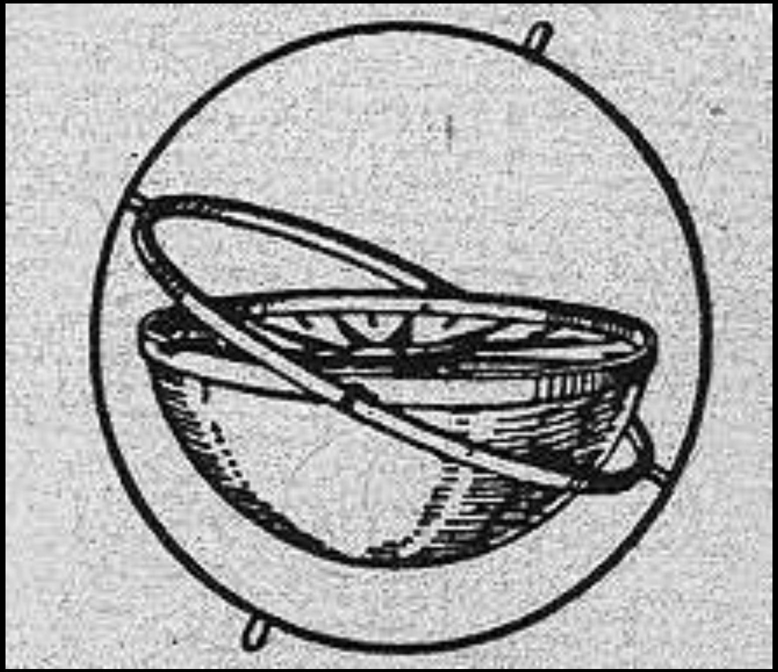
- Zerlegung der Drehung um drei Achsen
- Keine feste Rotationsreihenfolge
  - 12 Drehsysteme
  - „x-Konvention“ (z, x‘, z‘‘)
  - „y-Konvention“ (z, y‘, z‘‘)
  - Luftfahrnorm (DIN 9300) (z, y‘, x‘‘)

  ⇒ unterschiedliche Rotationmatrizen



$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gimbal Lock – Apollo 13



Vor- und Nachteile der Euler Rotation

Vorteile

- Einfache Mathematik
- Sehr leicht zu verstehen
- Viel Literatur
- Matrizendarstellung kann für Translation, Skalierung oder Projektion genutzt werden

Nachteile

- Beliebige Drehung nur selten intuitiv in drei Drehungen aufteilbar
- Reihenfolge der einzelnen Drehungen ist nicht beliebig
- Einzelne Drehung kann durch unterschiedliche Eulerdrehungen ausgedrückt werden
- Interpolation zwischen Drehungen ist schwer anzugeben
- Gimbal Lock

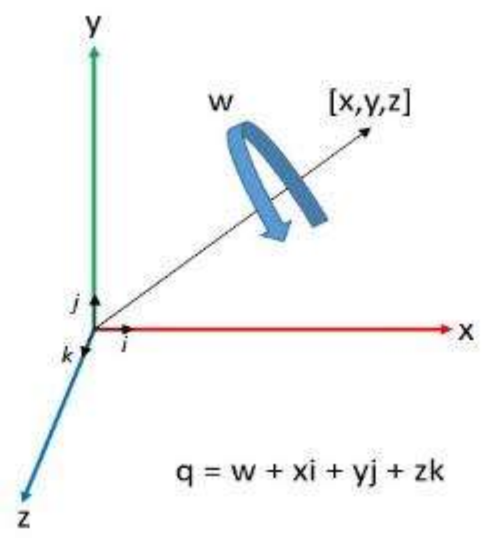
Rotationsquaternionen

Rotationen mit Quaternionen

Rotationen werden beschrieben durch:

$$q * p * q^{-1} \ bzw. \ q * p * \bar{q}$$

falls q^{-1} E ist



Beliebige normierte Rotationsachse: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: Winkel: $\boldsymbol{\theta}$

Korrespondierende Quaternion : $q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x\, i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) y\, j + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) z\, k$$

Rotationen mit Quaternionen - Beispiel

- Punkt **P (0,2,6)** rechtsherum um **60°** um die **z-Achse** ⇒ $\boldsymbol{Rotationsachse\ (0,0,-1)}$
- Rotationsquaternion: $\boldsymbol{q = \left[\cos(30), \sin(30) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \cos(30) - 0,5k}$
- Punktquaternion: $\mathbf{p} = \left[\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}\right] = \boldsymbol{2j + 6k}$

Rotationen mit Quaternionen - Beispiel

$$\boldsymbol{q} * \boldsymbol{p} * \overline{\boldsymbol{q}} = (\mathbf{cos(30)} - \mathbf{0,5}\boldsymbol{k}) * (\mathbf{2}\boldsymbol{j} + \mathbf{6}\boldsymbol{k}) * (\mathbf{cos(30)} + \mathbf{0,5}\boldsymbol{k})$$
$$= (2j * \cos(30) + 6\mathrm{k} * \cos(30) - 0{,}5\mathrm{k} * 2\mathrm{j} - 0{,}5\mathrm{k} * 6\mathrm{k}) * (\cos(30) + 0{,}5k)$$
$$= (2j * \cos(30) + 6\mathrm{k} * \cos(30) + \mathrm{i} + 3) * (\cos(30) + 0{,}5k)$$
$$= 2j * \cos^2(30) + 6k * \cos^2(30) + i * \cos(30) + 3 * \cos(30) + 2j * 0{,}5k * \cos(30)$$
$$+ 3k^2 * \cos(30) + i * 0{,}5k + 1{,}5k$$
$$= 2j * \cos^2(30) + 6k * \cos^2(30) + i * \cos(30) + 3 * \cos(30) + i * \cos(30) - 3$$
$$* \cos(30) - 0{,}5j + 1{,}5k$$
$$= i * (2 * \cos(30)) + j * (2 * \cos^2(30) - 0{,}5) + k * (6 * \cos^2(30) + 1{,}5)$$
$$= \boldsymbol{i} * \sqrt{\mathbf{3}} + \boldsymbol{j} * \mathbf{1} + \boldsymbol{k} * \mathbf{6}$$

- Ergebnis in Vektorschreibweise: $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{3}} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$
- Kontrollrechnung, ob sich Länge des Vektors verändert hat:

$$||p|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + 6^2} = ||p'||$$

Konkatenation von Rotationen

- Zwei Rotationen R1 und R2 dargestellt durch q_1 und q_2 können konkateniert werden durch:

$$R = R2 * R1 \ \ und\ eine\ Repräsentation\ \ durch\ q = q_2\ * q_1$$

$$\begin{aligned} q_2 * (q_1 * p * \overline{q_1}) * \overline{q_2} &= (q_2 * q_1) * p * (\overline{q_1} * \overline{q_2}) \\ &= (q_2 * q_1) * p * \overline{(q_2 * q_1)} \\ &= q * p * \ \bar{q}\ mit\ q = q_2 * q_1 \end{aligned}$$

Vor- und Nachteile der Quaternionen Rotation

Vorteile

- Intuitive / direkte Drehung um Drehachse
- Eindeutige Drehung
- Gimbal Lock existiert nicht
- Rotationen und Konkatenation ist effizienter
  - Bei 3x3-Matrix: 27 Multiplikationen 18 Additionen
  - Bei Quaternionen : 8 Multiplikationen 4 Divisionen
- Höhere Genauigkeit

Nachteile

- Quaternionen können nur Rotationen realisieren
- Nicht komplett intuitive Mathematik
- Nicht standardmäßig in der Literatur berücksichtigt

„LERP“/“SLERP“

„LERP“ / „SLERP“

Lineare Interpolation /Spherical Linear Interpolation

Idee: Interpolation einer Kamerafahrt zwischen zwei Positionen auf einer Kugeloberfläche

Lösung: Komponentenweise Interpolation zwischen 2 Quaternionen

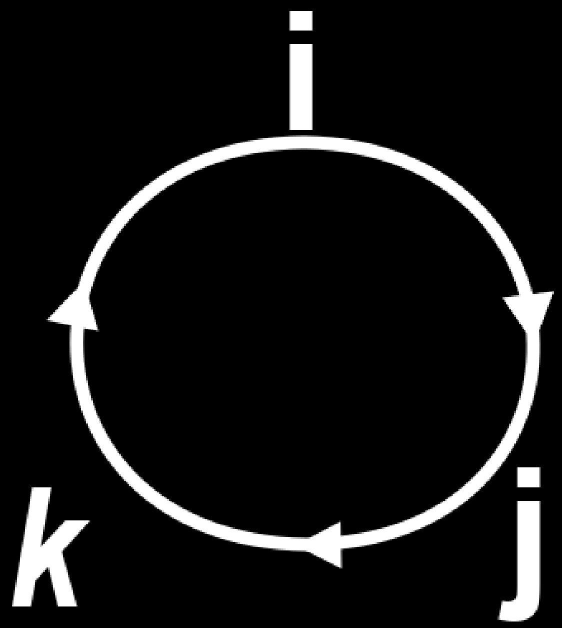
$$q(t) = LERP(q_1, q_2, t) = (1 - t) * q_1 + t\, q_2$$

Probleme:

- Länge der Quaternionen verändert sich (Normalisierung erforderlich)
- Interpolierte Werte sind nicht äquidistant (SLERP)

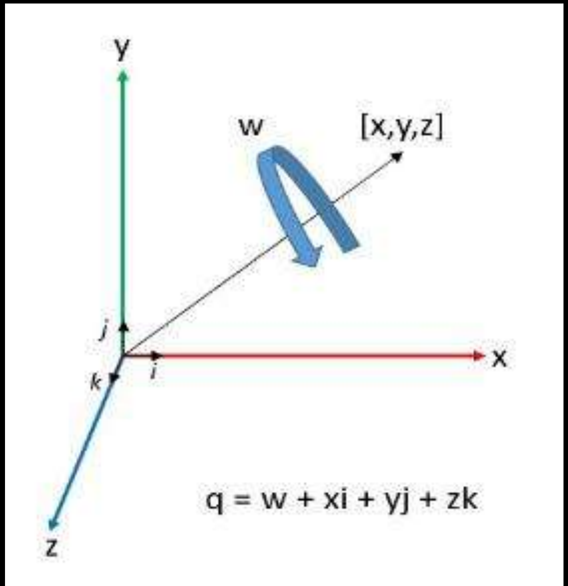
$$\mathrm{q(t) = SLERP(q1, q2, t)} = \frac{\sin\left((1 - \mathrm{t})\omega\right)}{\sin(\omega)} q1 + \frac{\sin(t\,\omega)}{\sin(\omega)} q2$$

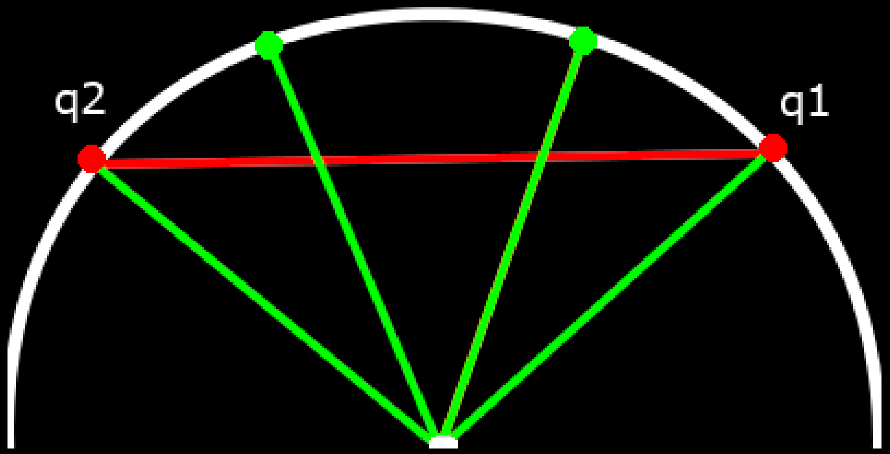
Fazit



$$q_1 * q_2 = [ss' - \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}', s\mathrm{v}' + s'\mathrm{v} + v \times v']$$

$$q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$$





Fragen

Quellen:

- http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/2011_quaternionen.pdf
- http://www.mathe.tu-freiberg.de/~bernstei/Sem_BNC/neubert.pdf
- http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~lschwach/SS11/Seminar_II/Quaternionen.pdf
- https://answers.unity.com/questions/147712/what-is-affected-by-the-w-in-quaternionxyzw.html
- https://www.uninformativ.de/bin/SpaceSim-2401fee.pdf
- https://www.uni-koblenz.de/~cg/veranst/ws0001/sem/Bartz.pdf
- http://run.usc.edu/cs520-s12/quaternions/quaternions-cs520.pdf
- https://archive.org/details/Erik_B_Dam_Martin_Koch_and_Martin_Lillholm___Quaternions_Interpolation_and_Animation/page/n1
- http://intern.fh-wedel.de/~bo/db/handouts/intern/ws18/orientation.pdf
- Visualizing Quaternions: series in interactive 3D technology by Andrew J. Hanson (ISBN 13: 978-0-12-088400-1)

Multiplikation Abgeschlossenheit

$$ij = x + iy + jz$$

$$i(ij) = i(x + iy + jz)$$

$$-j = ix - y + ijz$$

$$-j = ix - y + (x + iy + jz)z$$

$$0 = ix - y + xz + iyz + jz^2 + j$$

$$0 = (-y + xz) + i(x + yz) + j(z^2 + 1)$$