Dualität in der linearen Programmierung

Melanie Reißmann
minf102531
Seminar Medieninformatik

Inhalt

Einfürungsbeispiel: Ernährungsproblem

Es gibt vier „Grundnahrungsmittel“, mit jeweils einem Preis, der in Cent angegeben wird. Diese „Grundnahrungsmittel“ mit Preis sind: Kuchen, 50 Cent; Eiscreme, 20 Cent; Cola, 30 Cent und Chips, 80 Cent. Nun braucht der Mensch Nährstoffe in ebenfalls vier Kategorien. Diese sind zunächst Energie: 500 cal, dann Schokolade: 6 deka, Zucker: 10 deka und Fett: 8 deka.
Gegeben sei die folgende Tabelle:

Grundnahrungsmittel	Energie	Schokolade	Zucker	Fett
Kuchen	400 cal	3 deka	2 deka	2 deka
Eiscreme	200 cal	2 deka	2 deka	4 deka
Cola	150 cal	0 deka	4 deka	1 deka
Chips	500 cal	0 deka	4 deka	5 deka

Nun sollen die Kosten für die Ernährung möglichst gering gehalten werden, während die Nährstoffe jeweils in ausreichender Menge aufgenommen werden sollen. Die Entscheidungsvablen x_1, x_2, x_3 und x_4 entsprechen dabei den vier „Grundnahrungsmittel“. Daraus ergibt sich für die Kosten die Gleichung: $z = 50 * x_1 + 20 * x_2 + 30 * x_3 + 80 * x_4$. Diesen Wert gilt es zu minimieren.
Außerdem ergeben sich aus den Vorgaben vier Ungleichungen.
Für die Energie: $400 * x_1 + 200 * x_2 + 150 * x_3 + 500 * x_4 \geq 500$
Für die Schokolade: $3 * x_1 + 2 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 \geq 6$
Für den Zucker: $2 * x_1 + 2 * x_2 + 4 * x_3 + 4 * x_4 \geq 10$
Für das Fett: $2 * x_1 + 4 * x_2 + 1 * x_3 + 5 * x_4 \geq 8$
Dies ist jeweils die enthaltene Menge multipliziert mit den Einheiten der „Grundnahrungsmittel“ für jede Essenskategorie aufsummiert, Wobei die Gesammtmenge größer-gleich dem Tagesbedarf sein muss. Zum Schluss gibt es noch eine Restriktion, das keine der Variable kleiner als null sein darf, die nicht-Negativitäts-Bedingung. Diese wird folgendermaßen aufgeschrieben: $x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$.
Um das Problem zu lösen, muss nun das lineare Ungleichungssystem gelöst werden.

Was ist lineare Programmierung?

Lineare Programmierung oder auch Optimierung ist ein Ansatz der Problemlösung. Sie ist ein Teil der Operations Research und wird für die Unternehmensführung benötigt. Die zu lösenden Probleme sind dabei Minimierungs- oder Maximierungsprobleme. Bei Minimierungsproblemen ist für gewöhnlich ein Zielbetrag gegeben, der unter Einsatz von möglichst wenigen Ressourcen erreicht werden soll. Bei Maximierungsproblemen dagegen, sind die Ressourcen gegeben. Unter Verwendung dieser Ressourcen soll ein möglichst großer Gewinn erzielt werden. In beiden Fällen gibt es Regeln, die besagen, welche Produkte aus welchen Rohstoffen gefertigt werden und wie viel sie für den Gesammtgewinn einbringen. Neben den Regeln sind Bedingungen gegeben, wie zum Beispiel dass bestimmte Mengen von einigen Produkten hergestellt werden müssen. Für jedes Produkt gibt es eine Variable, wie oft dieses Produkt in den Endgewinn eingeht. Diese Variablen werden als Entscheidungsvariablen bezeichnet. Mit den Variablen werden aus den Regeln und Bedingungen lineare Gleichungen und Ungleichungen und somit ein lineares (Un-)Gleichungssystem erstellt. Der Gewinn wird in einer Zielfunktion dargestellt, in die die Entscheidungsvablen und die Produktpreise eingehen, wenn es sich um ein Maximierungsproblem handelt. Handelt es sich um ein Minimierungsproblem, dann berechnet die Zielfunktion den Wert, der möglichst klein sein soll. In der Unternehmensführung sind dies meist die Kosten, in anederen Kontexten sind allerdings auch andere Zieleinheiten möglich, wie Kallorien bei einem Diätplan.

Damit der Ansatz der linearen Programmierung genutzt werden kann, müssen die Probleme linear sein. Dies lässt sich in vier Unterpunkte einteilen, die für jedes Problem gelten müssen.
Der erste Punkt ist die Additivität, das beseutet, dass die einzelnen Variablen vollkommen unabhängig voneinander sind. Sie werden mit ihrer jeweiligen Gewichtung in das Endergebnis eingerechnet, werden aber nicht durch die Änderung einer anderen Variablen beeinflusst.
Punkt zwei, der erfüllt sein muss, ist die Proportionalität, die Gewichtung der einzelnen Variablen muss in der Zielfunktion konstant sein. Sie lässt sich nicht verändern. Ein Produkt hat also immer den gleichen Preis beziehungsweise Ressourcen kosten immer das gleiche. Mengenrabatte, die es in der Realität gäbe, werden im Modell der linearen Programmierung nicht berücksichtigt.
Außerdem muss Teilbarkeit gegeben sein. Die Lösung hat demnach reelle Werte, keine ganzzahligen. Neben der gebräuchlichen reellen linearen Programmierung existiert auch die ganzzahlige lineare Programmierung, diese ist allerdings wesentlich komplexer und ineffizienter, während reellwertige lineare Programmierung als Näherung für eine ganzzahlige Lösung genutzt werden kann.
Zu guter letzt sollte noch Sicherheit vorhanden sein. Die Variablengewichtungen sind somit nicht nur konstant, sondern auch von vorne herein bekannt.

Was ist Dualität?

Dualität bezeichnet das Vorgehen, ein Problem auf mehrere Weisen zu betrachten. Dabei wird ein ähnliches Objekt zum eigentlichen Objekt betrachtet. Zwischen den Objekten muss eine mögliche eins-zu-eins-Abbildung vorhanden sein. In der Mathematik existiert zu jeder Struktur, Formel und jedem beliebigen anderen Objekt ein duales beziehungsweise ein inverses Element, also eine andere Struktur, Formel oder ein Objekt. Aus den Eigenschaften dieses dualen Objektes lässt sich auf die Eigenschaften des primalen Objektes schließen. Zusammengefasst ist Dualität demnach die Betrachtung weiterer Objekte zum Zweck des Erkenntnisgewinns über ein zu untersuchendes Objekt.

Duaität in der linearen Programmierung

In der linearen Programmierung ist der Ansatz der Dualität die Betrachtung mehrerer Probleme, um ein gegebenes Problem zu lösen. Es wird ein duales Problem erstellt, welches invers zu dem gegebenen Problem ist. Ist das primale Problem dabei ein Minimierungsproblem, so ist das duale Problem ein Maximierungsproblem und umgekehrt. Bei dauler Problemlösung gibt es somit immer ein Minimierungs- und ein Maximierungsproblem. Diese Probleme lassen sich auseinander konstruieren. In der Unternehmensführung sollen dabei für gewöhnlich die Kosten minimiert oder im Umkehrschluss der Umsatz und der Gewinn maximiert werden. Die Kosten entsprechen in dieser Betrachtung den benötigten Ressourcen.

Wie wird aus dem primalen ein duales Problem konstruiert?

Um aus einem primalen Problem ein duales zu konstruieren, müssen vier Regeln eingehalten werden. Die Ungleichungen des primalen Problems werden auf positive Variablen abgebildet, also auf Variablen mit der Restriktion beziehungsweise Bedingung, dass sie größer-gleich null sein müssen. Die Gleichungen dagegen werden auf Variblen ohne Eingrenzung abgebildet. Alle Variabken aus dem primalen Problem, die auf positive Werte beschränkt sind, werden auf je eine Ungleichung abgebildet. Die übrigen Variablen bekommen Gleichungen zugeordnet.

Dualitätssatz

In der Dualität gibt es zwei Grundsätze, die sogenannten Dualitätssätze. Einer dieser Grundsätze wird als der schwache Dualitätssatz bezeichnet, der andere als der starke Dualitätssatz. Beide Sätze beziehen sich auf das Verhältnis der Lösungen der Probleme zueinander, wobei der starke Dualitätssatz strenger ist als der schwache.

Schwacher Dualitätssatz:

z: Minimierungsgleichung
$\bar{c}$: Vektor der Konstanten in z
$\bar{x}$: zulässige Lösung von z
$\tilde{z}$: Maximierungsgleichung
$\bar{y}$: zulässige Lösung von $\tilde{z}$
A: Matrix zur Lösung primales Problem
$\bar{b}$: rechte Seite der Lösungsmatrix A

Sei das primale Problem ein Minimierungsproblem mit der Gleichung $z(\bar{x})$ und das duale Problem ein Maximierungsproblem mit der Gleichung $\tilde{z}(\bar{y})$, dann ist $\bar{x}$ eine zulässige Lösung des primalen Problems und $\bar{y}$ eine zulässige Läsung des dualen Problems. $\bar{x}$ und $\bar{y}$ sind dabei Vektoren, da sowohl die Minimierungs- als auch die Maximierungsgleichung mehrere Variablen beinhalten und somit ihre Lösungen von mehreren Werten abhänging sind. Der Vektor der Konstanten in z wird mit $\bar{c}$ bezeichnet. Sei A nun die Matrix, die sich aus den Gleichungen des primalen Problems ergibt und $\bar{b}$ der Vektor, der sich aus den rechten Seiten der Ungleichungen und Gleichungen ergibt. Dabei sind die gegebenen Bedingungen zu beachten. Bei einem Minimierungsproblem haben die Werte in $\bar{b}$ kleiner-gleich den Werten zu sein, die sich aus der Multiplikation der Matrix A mit einer zulässigen Lösung des Problems ergeben.

Ist das alles gegeben, dann gilt der schwache Dualitätssatz. Dieser besagt, dass der Wert der Gleichung z vom Vektor $\bar{x}$ gleich der transponierte Vektor $\bar{c}$ multipliziert mit dem Vektor $\bar{x}$ ist, da dieser so ausgerechnet wird. Das Ergebnis ist größer-gleich dem Ergebnis des transponierten Vektor $\bar{y}$ multipliziert mit der Matrix A multipliziert mit dem Vektor $\bar{x}$. Dieser Wert ist wiederum größer-gleich dem Wert des transponierten Vektors $\bar{y}$ multipliziert mit dem Vektor $\bar{b}$. Vektor $\bar{y}$ multipliziert mit dem Vektor $\bar{b}$ entspricht dabei dem berechneten Wert der Gleichung $\tilde{z}$ vom Vektor $\bar{y}$. An dieser Stelle muss von beiden Problemen der entsprechende Wert berechnet werden, also von beiden Problemen die Kosten oder von beiden Problemen der Gewinn.

In mathematischer Schreibweise sieht der schwache Dualitätssatz folgendermaßen aus:

$$z(\bar{x}) = \bar{c}^T * \bar{x} \geq \bar{y}^T * A * \bar{x} \geq \bar{y}^T * \bar{b} = \tilde{z}(\bar{y})$$

Starker Dualitätssatz:

z: Minimierungsgleichung
$\bar{c}$: Vektor der Konstanten in z
$\bar{x}$: optimale Lösung von z
$\tilde{z}$: Maximierungsgleichung
$\bar{y}$: optimale Lösung von $\tilde{z}$
A: Matrix zur Lösung primales Problem
$\bar{b}$: rechte Seite von $A * \bar{x}$

Ändert sich in der Betrachtungsweise, dass nun $\bar{x}$ und $\bar{y}$ nicht mehr nur zulässige, sondern optimale Lösungsvektoren für das primale und das duale Problem sind, dann bedeutet das, dass $\bar{b}$ gleich den Werten ist, die das Ergebnis der Multiplikation der A mit dem Vektor $\bar{x}$ ergeben. Es gilt der starke Dualitätssatz. Dieser besagt, dass der transponierte Vektor $\bar{c}$ multipliziert mit dem Vektor $\bar{x}$ gleich dem transponierten Vektor $\bar{y}$ multipliziert mit der Matrix A multipliziert mit dem Vektor $\bar{x}$ und somit gleich dem transponierten Vektor $\bar{y}$ multipliziert mit dem Vektor $\bar{b}$ ist. Demnach sind laut dem starken Dualitätssatz die Ergebnisse der Gleichung z vom Vektor $\bar{x}$ und der Gleichung $\tilde{z}$ vom Vektor $\bar{y}$ gleich, wenn beide Lösungen optimal sind.

In mathematischer Schreibweise sieht der starke Dualitätssatz folgendermaßen aus:

$$z(\bar{x}) = \bar{c}^T * \bar{x} = \bar{y}^T * A * \bar{x} = \bar{y}^T * \bar{b} = \tilde{z}(\bar{y})$$

Beweis

Sei jetzt das primale Problem ein Minimierungsproblem mit $z = \bar{c}^T * \bar{x}$, wobei z minimiert werden soll. Aus den Gleichungen beziehungsweise Ungleichungen des Problems ergeben sich wieder die Matrix A und der Vektor $\bar{b}$ mit Werten, die größer-gleich denen des Vektors sind, der sich aus der Multiplikation der Matrix A und des Lösungsvektors $\bar{x}$ ergeben. $\bar{x}$ ist dabei eine zulässige Lösung, bei der alle Variablen größer-gleich null sind.

Sei nun das duale Problem entsprechend ein Maximierungsproblem mit $\tilde{z} = \bar{b}^T * \bar{y}$, wobei $\tilde{z}$ maximiert werden soll. Dabei ist nun $\bar{y}$ irgendeine zulässige Lösung und es gilt die transponierte Matrix A des primalen Problems multipliziert mit dem Lösungsvektor $\bar{y}$ des dualen Problems ergibt Werte, die größer-gleich den Konstanten der Zielfunktion z des primalen Problems sind.

primales Problem: $z = \bar{c}^T * \bar{x}$
z soll minimiert werden
$A * \bar{x} \geq \bar{b}$
A: Matrix aus den (Un)-Gleichungen des Problems
$\bar{b}$: rechte Seite der (Un)-Gleichungen
$x_i \geq 0$
$\bar{x}$: Lösungsvektor zu z mit Zahlen alle ≥ null irgendeine zulässige Lösung

duales Problem: $\tilde{z} = \bar{b}^T * \bar{y}$
$\tilde{z}$ soll maximiert werden
$\bar{y}$: Lösungsvektor zu $\tilde{z}$ irgendeine zulässige Lösung
$A^T * \bar{y} \leq \bar{c}$

Nun gelten, wie aus den Problemen bekannt $x_i \geq 0$ und $A^T * \bar{y} \leq \bar{c}$. $A^T * \bar{y} \leq \bar{c}$ wird so umgestellt, dass $\bar{c}$ auf der linken Seite der Ungleichung steht, dabei werden $\bar{c}$, $\bar{y}$ und A transponiert und die Reihenfolge von $\bar{y}$ und A wird vertauscht.

I. $\bar{c}^T \geq \bar{y}^T * A$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten mit $\bar{x}$ multipliziert.

II. $\bar{c}^T * \bar{x} \geq \bar{y}^T * A * \bar{x}$

Aus dem primalen Problem sind $z = \bar{c}^T * \bar{x}$ und $A * \bar{x} \geq \bar{b}$ bekannt, so dass die Ungleichung auf beiden Seiten um einen Vergleich erwitert werden kann.

III. $z(\bar{x}) = \bar{c}^T * \bar{x} \geq \bar{y}^T * A * \bar{x} \geq \bar{y}^T * \bar{b}$

Aus dem dualen Problem ist $\tilde{z} = \bar{b}^T * \bar{y}$ bekannt. Wir dies so umgestellt, dass $\tilde{z}(\bar{y})$ auf der rechten Seite steht werden dabei $\bar{b}$ und $\bar{y}$ transponiert und ihre Reihenfolge vertauscht. Nun entspricht die linke Seite der Gleichung dem rechtesten Term der Ungleichung III. und die Ungleichung kann erneut erweitert werden.

IV. $z(\bar{x}) = \bar{c}^T * \bar{x} \geq \bar{y}^T * A * \bar{x} \geq \bar{y}^T * \bar{b} = \tilde{z}(\bar{y})$

Diese Ungleichung IV. entspricht nun dem zuvor beschriebenen schwachen Dualitätssatz.
q.e.d.

Dieser schwache Dualitätssatz gilt für jede zulässige Lösung von zwei Optimierungsproblemen, die dual zueinander sind, die Lösung des Minimierungsproblems hat immer einen Wert, der größer-gleich dem Wert der Lösung des Maximierungsproblems ist. Der starke Dualitätssatz dagegen ist nur für die optimalen Lösungen der beiden Probleme relevant, da er besagt, dass die optimalen Lösungen den gleichen Wert liefern.

Der starke Dualitätssatz

Damit der starke Dualitätssatz gilt, müssen einige Vorraussetzungen erfüllt sein. Abgesehen davon, dass $\bar{x}$ die optimale Lösung des primalen Problems sein muss, müssen die Basisvektoren $\bar{a}_1 - \bar{a}_m$ gegeben sein, aus denen sich die Matrix A ergibt. A_0 stellt die Matrix A als Vektor aus den Basisvektoren dar. X ist nun die Matrix aus den Darstellungskoeffizienten der (Un-)Gleichungen des Problems. Des Weiteren gibt es den Vektor $\bar{c}$ aus den Koeffizienten der Zielfunktion und den Vektor $\bar{z}$, dessen Werte jeweils aus dem Skallarprodukt von $\bar{c}$ mit einer Zeile der Koeffizientenmatrix bestehen, der transponierte Vektor $\bar{z}$ wird also mit der Gleichung transponierter Vektor $\bar{c}$ multipliziert mit der Matrix X berechnet. Für die Vektoren $\bar{c}$ und $\bar{z}$ gilt, dass jeder Wert von $\bar{z}$ kleiner-gleich dem Wert an der gleichen Stelle von $\bar{c}$ sein muss. Diese letzte Bedingung ergibt sich aus dem Optimalitätskriterium der Simplexmethode. Nun sind $A_0 * \bar{x} = \bar{b}$ und $A_0 * X = A$ gegeben. Werden beide mit A_0^{-1} multipliziert, so ergeben sich die Gleichungen $\bar{x} = A_0^{-1} * \bar{b}$ und $X = A_0^{-1} * A$, welche Vorraussetzungen sind, damit der starke Dualitätssatz gilt.

Wenn all dies gilt, dann kann die optimale Lösung des dualen Problems zu einem gegebenen primalen Problem aus diesem berechnet werden. Der optimale Lösungsvektor $\bar{y}$ lässt sich berechnen, indem die transponierte Matrix A_0 mit dem Vektor $\bar{c}$ multipliziert wird. Dass diese Lösung für $\bar{y}$ zulässig ist, ergibt sich durch Ersetzen und Umformen. Der transponierte Vektor des Lösungsvektors muss multipliziert mit der Matrix A Werte enthalten, die kleiner-gleich denen des Koeffizientenvektors $\bar{c}$ sind. Dies ist gegeben, da sich $\bar{y}^T$ durch $\bar{c}^T * A_0^{-1}$ ersetzten lässt, woraus sich $\bar{c}^T * A_0^{-1} * A$ ergibt. $A_0^{-1} * A$ entspricht wiederum X, so ergibt sich $\bar{c}^T * X$, was wiederum $\bar{z}$ enspricht. Das z nur Werte enthält, die kleiner-gleich den entsprechenden Stellen von c sind, ist ja bereits eine Vorraussetzung gewesen, um den starken Dualitätssatz überhaupt anwenden zu können. Noch einmal in mathematischer Schreibweise:
$\bar{y}^T * A = \bar{c}^T * A_0^{-1} * A = \bar{c}^T * X = \bar{z}^T \leq \bar{c}^T$

Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Optimalität von $\bar{y}$ nachweisen. Dazu werden die optimalen Lösungen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ in die Gleichung des starken Dualitätssatzes eingesetz.

$$\tilde{z}(\bar{y}) = \bar{b}^T * \bar{y} = \bar{y}^T * \bar{b} = \bar{c}^T * A_0^{-1} * \bar{b} = \bar{c}^T * \bar{x} = z(\bar{x})$$

Sonderfälle

Beide Dualitätssätze finden nur dann Anwendung, wenn sich jeweils das primale und das duale Probleme lösen lassen. Haben beide Probleme ein Optimum, dann sind sie gleich. Existiert für ein Problem keine optimale Lösung, weil die Lösung beispielsweise ganzzahlig sein müsste, beispielsweise in der Herstellung von Möbeln, wo immer komplette Teile entstehen müssen, im Gegensatz zu so etwas wie Farbenherstellung, wo auch angebrochene Liter hergestellt werden können, dann gibt es auch für das duale zweite Problem keine reellwertige optimale Lösung. Ist ein Problem aufgrund von falschen Restriktionen nicht sinnvoll lösbar, so hat auch das duale Problem keine sinvolle Lösung, die auch nur den schwachen Dualitätssatz erfüllen könnte. Existieren in einem der beiden Probleme keine Beschränkungen, dann ist dass jeweils andere Problem nicht zulässig lösbar. Es müssen also beide Probleme, das primale und das duale, beschränkt sein, damit beide lösbar sind und sie haben entweder beide eine optimale Lösung oder keines von beiden Problemen hat eine optimale Lösung.

Quellen

http://ls11-www.cs.tu-dortmund.de/people/gutweng/AD08/VO18_LPDualitaet.pdf
https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/OPTI/SS07/opti_lin09.pdf
https://statsoz-neu.userweb.mwn.de/lehre/2016_SoSe/Entscheidungstheorie/dualitaet.pdf
http://www.jsiassi.de/mathe/Operations%20Research/skr_05.pdf
https://lp.uni-goettingen.de/get/text/2151
https://stud.fh-wedel.de/handout/Iwanowski/OR/02_lineare_optimierung_handout.pdf