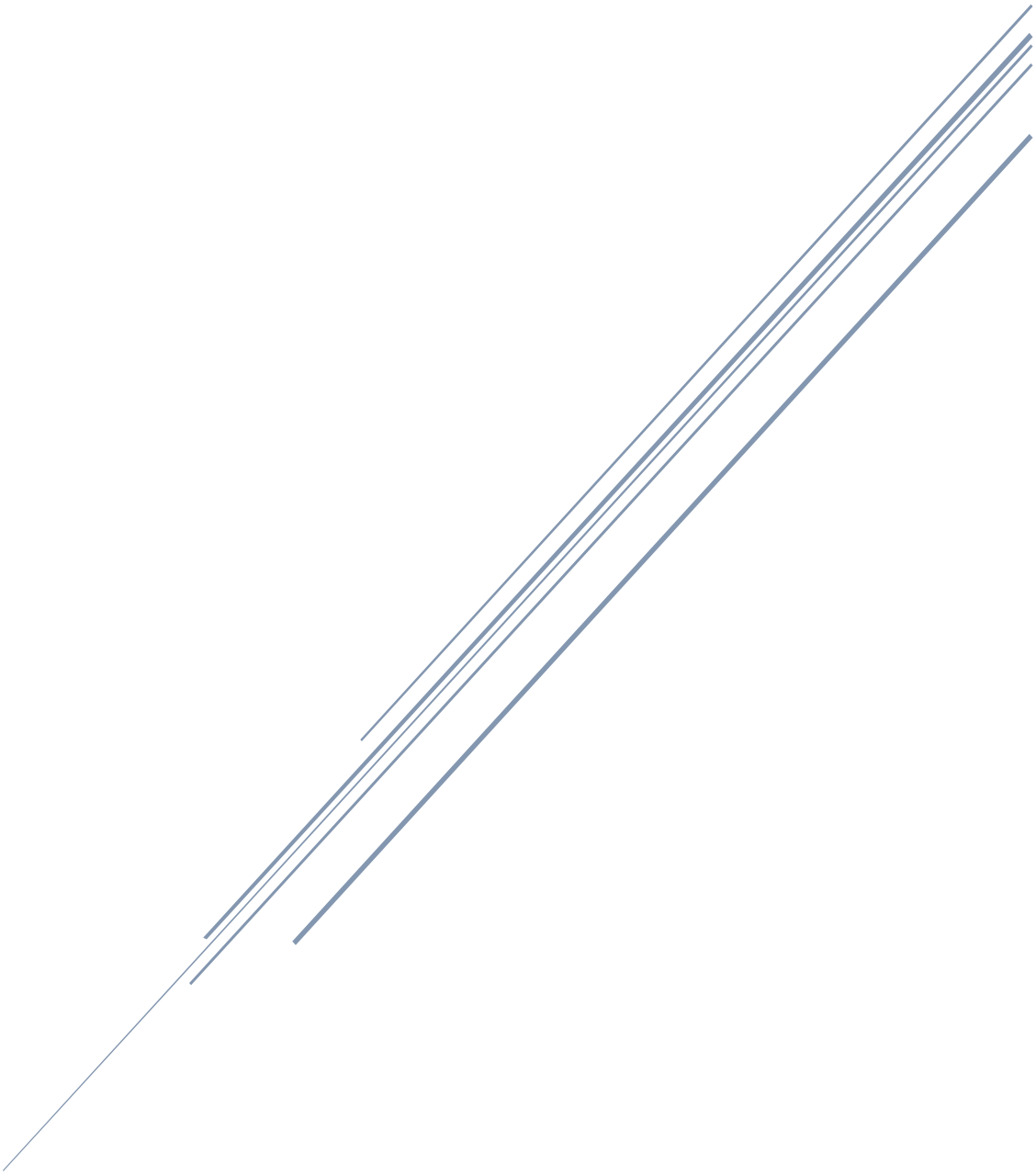
SEMINARVORTRAG

Quaternionen und ihre Anwendungen

Marco Broese, inf104150 WS19/20

Ausarbeitung des Seminarvortrags vom 04.12.2019 im Rahmen des Seminars zu Vertiefungen und Anwendungen von Prof. Dr. Sebastian Iwanowski



FH-Wedel
Seminar zu Vertiefungen und Anwendungen

Inhaltsverzeichnis

Motivation und Hintergrund zu Quaternionen 2
Geschichte 3
Mathematische Grundlagen 5
Vektoren 5
Länge eines Vektors 5
Punktprodukt/Skalarprodukt in 4D 5
Kreuzprodukt 3D 6
Einheitsvektor 6
Quaternionen 7
Körper Axiome 8
Addition 8
Multiplikation 9
Multiplikation Axiome 9
Euler Rotation 11
Gimbal Lock 11
Vor- und Nachteile der Euler Rotation 13
Rotationsquaternionen 14
Beispiel für eine Rotation (Bartz, 2001) 14
Konkatenation 15
Vor- und Nachteile von Rotationsquaternion 15
Lineare Interpolation /Spherical Linear Interpolation 17

Motivation und Hintergrund zu Quaternionen

Die ursprüngliche Idee zu Quaternionen stammt von den komplexen Zahlen ab. Mittels komplexer Zahlen können Punkte in einer Ebene(2D) dargestellt werden. Diese Darstellung basiert auf der eulerschen Formel bzw. Eulerformel, welche es erlaubt einen Punkt mittels Länge und Winkel darzustellen. Eine Multiplikation zwei solcher Zahlen impliziert eine Rotation in 2D. Daher war anzunehmen, dass eine Erweiterung zu einer 3D Rotation möglich wäre, durch die Addition einer weiteren Dimension. Das Resultat daraus wäre, dass es sehr einfach ist Rotationen im 3D-Raum darzustellen.

William Hamilton versuchte es Initial zu beweisen, indem er eine weitere imaginäre Zahl hinzufügte, um Komplexe Zahlen in 3D zu generalisieren.

$$z = x + i\,y + j\,z \quad mit\ i^2 = j^2 = -1$$

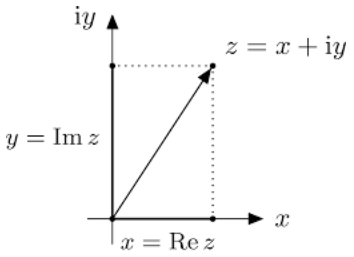


Abbildung 1: Darstellung einer Komplexen Zahl in 2D (Unterweger, 2020)

Jedoch musste Hamilton feststellen, dass solch ein Tripel nicht abgeschlossen ist bezüglich der Multiplikation.

So kann beispielsweise die Multiplikation von i und i nicht dargestellt werden in der Form von $x + i\,y + j\,z$. Wäre die Multiplikation abgeschlossen, dann würde es eine Belegung für $x, y, z \in \mathbb{R}$ geben, welche $i\,j = x + i\,y + j\,z$ erfüllt.

$$\begin{aligned} ij &= x + iy + jz \\ i(ij) &= i(x + iy + jz) \\ -j &= ix - y + ijz \\ -j &= ix - y + (x + iy + jz)z \\ 0 &= ix - y + xz + iyz + jz^2 + j \\ 0 &= (-y + xz) + i(x + yz) + j(z^2 + 1) \end{aligned}$$

Für die Gültigkeit der Formel müsste gelten:

$$xz - y = x + yz = z^2 + 1 = 0$$

Da aber gilt $z \in \mathbb{R}$ kann es für $z^2 + 1 = 0$ keine Lösung geben, und somit ist die Multiplikation nicht abgeschlossen (Ahn, 2012).

Geschichte

Die Geschichte der Quaternionen begann mit Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Nachdem er wie oben beschrieben mehrere Jahre versuchte eine Rotation in 3D mittels eines Realteiles und zwei Imaginärteilen zu beschreiben, entdeckte er am 16. Oktober 1843, dass er das Problem der Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation lösen kann durch den Einsatz von drei Imaginärteilen und einem Realteil.

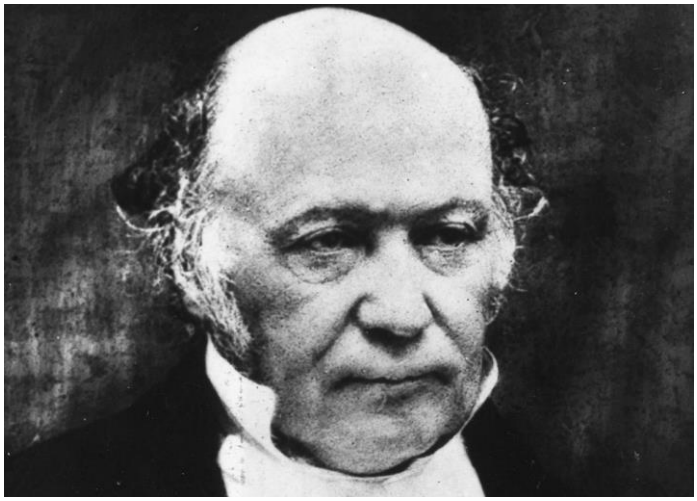


Abbildung 2: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) (Hanson, Dezember 2005)

Der Weg bis zu dieser Erkenntnis hat Hamilton viele Jahre gekostet und hatte sogar Einfluss auf seine Kinder, die ihn jeden Morgen fragten: *„Well, Papa can you multiply triplets?“* (Hanson, Dezember 2005). Diese Frage musste er jeden Morgen verneinen und antworten, dass er sie nur Addieren und Subtrahieren könne.

Seine Erleuchtung kam ihm, als er am 16. Oktober 1843 über die Broome Bridge in Dublin ging. Dort ritzte er seine Entdeckung in die Wand der Brücke, damit falls er es nicht mehr schaffen sollte sie weiterzugeben, sie trotzdem erhalten bliebe.

Abbildung 3: Gedenkplatte an der Broome Bridge in Dublin (Hanson, Dezember 2005) (Cone83, 2017)

Hamiltons Entdeckung lässt sich in einer kurzen Formel zusammenfassen, welche das Problem bezüglich der Multiplikation löst:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Diese Formel ermöglichte es ihm Punkte im 3D-Raum und die Rotation durch Multiplikation darzustellen. Dieses bildet auch die Grundlage des ersten Werkes, welches Hamilton zu Quaternionen veröffentlicht hat „Lectures on Quaternions“ (1864).

Seine Entdeckung hat auch in heutiger Zeit noch Auswirkungen auf neue Technologien, insbesondere im Bereich der Robotik und in der Computergrafik (Wikipedia, 2020).

Mathematische Grundlagen

Dieses Kapitel soll eine Mathematische Grundlage schaffen für die folgenden Kapitel, dabei wird auf Notationen eingegangen, welche in den folgenden Kapiteln verwendet werden.

Vektoren

Ein Vektor ist ein Element aus einem Vektorraum. Typischerweise besteht ein Vektor x aus einer Gruppe von reellen Zahlen. So werden Beispielsweise die Vektoren der Dimension 2, 3, 4 wie folgt dargestellt:

2D Vektor	3D Vektor	4D Vektor
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Weitere Dimensionen werden äquivalent dargestellt (Hanson, Dezember 2005)(Kapitel 3.1).

Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors wird auch Betrag genannt. Die Länge eines Vektors wird nach den Satz von Pythagoras berechnet, dieses entspricht auch der sogenannten euklidischen Norm.

Beispielsweise für die Dimensionen 2, 3 ,4:

2D Vektor	3D Vektor	4D Vektor
$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\lvert\vec{x}\rvert = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

Weitere Dimensionen werden äquivalent berechnet (Hanson, Dezember 2005)(Kapitel 3.2).

Punktprodukt/Skalarprodukt in 4D

Das Punktprodukt oder auch Skalarprodukt ist eng verbunden mit der Länge eines Vektors und wird in 4D, wie folgt dargestellt:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + w_1 w_2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} mit\ x, y, z, w \in \mathbb{R}$$

Das Weglassen von Termen würde das Skalarprodukt für 2D und 3D erzeugen, welche jedoch im folgendem nicht weiter relevant sind (Hanson, Dezember 2005)(Kapitel 3.3).

Kreuzprodukt 3D

Das Kreuzprodukt liefert einen Senkrechten Vektor zu den beiden angegebenen Vektoren. Im weiteren Verlauf wird das Kreuzprodukt in 3D essenziel sein für eine einfache Darstellung der Multiplikation von Quaternionen (Hanson, Dezember 2005)(Kapitel 3.4).

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} mit\ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Einheitsvektor

Ein Vektor wird als Einheitsvektor bezeichnet, wenn die Länge des Vektors 1 beträgt. Einheitsvektor ist das Resultat, wenn ein Vektor (2D, 3D, 4D) durch seine Norm (=Betrag) geteilt wird (Hanson, Dezember 2005)(Kapitel 3.5).

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}}{||x||}$$

Quaternionen

Die Menge der Quaternionen wird allgemein nach Hamilton ausgedrückt mittels des Symbols $\mathbb{H}$.

Die Menge der Quaternionen wird dargestellt durch:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \{(w, x, y, z) | w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Es gibt noch zwei weitere Darstellungsformen zum einen:

$$q = w + i\,x + j\,y + k\,z \;\; mit\; q \in \mathbb{H}$$

Und zum anderen:

$$q = \left[w, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \; bzw. \; q = [s, \vec{v}]$$

Mit $s \in \mathbb{R}$ als Realteil (Re(q)) und $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ als Imaginärteil (Im(q)).

Die Addition geschieht, wie bei Vektoren, Komponentenweise und folgt keinen besonderen Regeln.

Die Basis der Multiplikation besteht aus der Hamilton Regeln, welche die Abgeschlossenheit der Multiplikation erlauben.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Nach gleichem Prinzip lassen sich auch die anderen Kombinationen bezüglich der Multiplikation ermitteln, dargestellt im folgendem als Tabelle:

*	1	i	j	K
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	1

Körper Axiome

Eine besondere Eigenschaft bildet der Körper über den Quaternionen, da dieser den ersten Schiefkörper bildet.

Bei einem Schiefkörper handelt es sich um einen Regulären Körper, ohne die Eigenschaft der Kommutativität bezüglich der Multiplikation, alle anderen Eigenschaften eines Körpers werden dennoch erfüllt.

	Addition	**Multiplikation**
Assoziativität	$a + (b + c) = (a + \mathrm{b}) + \mathrm{c}$	$a * (b * c) = (a * \mathrm{b}) * c$
Neutrales Element	$0 + a = a \mid 0 \in \mathbb{K}$	$1 * a = a * 1 = a \mid 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Inverse	$(-a)\ mit\ (-a) + a = 0$	$a^{-1}\ mit\ a^{-1} * a = 1$
Distributivgesetz	$a * (b + c) = a * b + a * c$ und	$(a + b) * c = a * c + b * c$
Kommutativität	$a + b = b + a$	$\boldsymbol{a * b = b * a}$

Addition

Da die Addition Komponentenweise definiert ist, ergeben sich die Axiome der Addition aus denen der Addition in $\mathbb{R}$.

$$q1 + q2 = (w1 + w2) + i(x1 + x2) + j(y1 + y2) + k(z1 + z2)$$

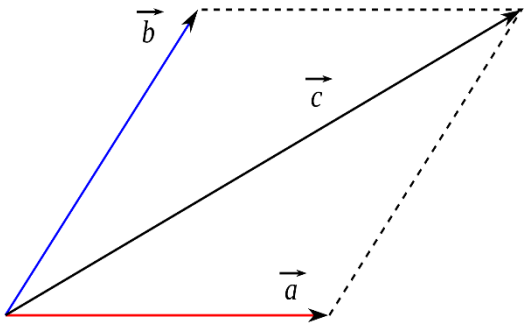


Abbildung 4: Addition von zwei Vektoren in 2D ist äquivalent zu einer Addition von zwei Quaternionen in 4D

Somit ergeben sich die Folgende Axiome aus denen von $\mathbb{R}$:

- Assoziativität bzgl. Addition
- Kommutativität bzgl. Addition
- Neutrales Element bzgl. Addition: $(0,0,0,0) + a = a$
- Inverses Element bzgl. Addition: $-a = (-w, -x, -y, -z)$, sodass $-a + a = 0$

Multiplikation

Die Multiplikation wird durch eine komponentenweise Multiplikation und der Hamilton-Regel realisiert.

$$\begin{aligned} q1 * q2 &= (w1 + ix1 + jy1 + kz1) * (w2 + ix2 + jy2 + kz2) \\ &= w1w2 - x1x2 - y1y2 - z1z2 \\ &\quad + i(w1x2 + x1w2 + y1z2 - z1y2) \\ &\quad + j(w1y2 - x1z2 + y1w2 + z1x2) \\ &\quad + k(w1z2 + x1y2 - y1x2 + z1w2) \end{aligned}$$

Eine andere Darstellungsform der Multiplikation bietet die Nutzung des Punktproduktes und des Kreuzproduktes, welche eine einfachere Darstellung ermöglicht.

$$q1 = [s, v], \qquad q2 = [s', v']$$

$$q1 * q2 = [ss' - \mathrm{v} \cdot \mathrm{v}', \mathrm{sv}' + \mathrm{s}'\mathrm{v} + v \times v']$$

Multiplikation Axiome

Assoziativität

Die Assoziativität bezüglich der Multiplikation lässt sich durch einfaches Nachrechnen Beweisen unter Verwendung der Hamilton Regeln (Beweis in (Erik B. Dam, 2020)).

$$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$$

Neutrales Element

Das Neutrales Element bezüglich der Multiplikation lässt sich durch einfaches Nachrechnen Beweisen unter Verwendung der Hamilton Regeln und Verwendung des Quaternion $\boldsymbol{q} = \left[\mathbf{1}, \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\right]$ (Beweis in (Erik B. Dam, 2020)Kapitel 3.3.3 Lemma 1).

$$1 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}\ mit\ \ \mathbf{1} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} * \mathbf{1} = \boldsymbol{a}$$

Inverses Element

Das Inverses Element bezüglich der Multiplikation ist definiert durch:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{||q||}$$

Mit $\bar{q}$ als das Konjungierte und $\big||q|\big|$ als die Norm.

$$\bar{q} = w - ix - jy - kz$$

$$\begin{aligned}\big||q|\big| = q * \bar{q} &= (w + ix + jy + kz) * (w - ix - jy - kz) \\ &= w^2 + x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

Für Einheitsquaternionen können wir daraus folgern, dass das Inverse definiert ist durch:

$$q^{-1} = \bar{q}$$

Da die $\mathrm{Norm} = \big||q|\big| = 1$ ist (Beweis in (Erik B. Dam, 2020)Kapitel 3.3.3 Lemma 2).

Nichtkommutativität

Die Nichtkommutativität kann durch ein einfaches Beispiel gezeigt werden (Ledoux, 2011):

Sei $q_1 = i$ und sei $q_2 = j$.

Dann gilt für die Multiplikation mit der Hamilton Regel:

$$q_1 * q_2 = ij = k \neq -\mathrm{k} = ji = q_2 * q_1$$

Distributivgesetz

Die Distributivgesetze bezüglich der Multiplikation und Addition lassen sich durch einfaches Nachrechnen Beweisen unter Verwendung der Hamilton Regeln.

$$a * (b + c) = a * b + a * c \quad und \quad (a + b) * c = a * c + b * c$$

Euler Rotation

Rotationen werden meistens dargestellt durch drei einzelne Rotationen eine Rotation um die X-Achse, eine um die Y-Achse und eine um die Z- Achse. Diese Form der Darstellung nennt sich Euler Rotation, dabei wird eine Rotation im 3D-Raum zerlegt in seine drei einzelnen Komponenten.

Die einzelnen Rotationen werden angegeben in Matrixform:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellungsform erlaubt es Rotationen um mehrere Achsen relativ einfach darzustellen, durch eine Matrix Multiplikation. Dabei muss auf die Reihenfolge geachtet werden, in welcher die Matrizen miteinander multipliziert werden, da die Matrix Multiplikation nicht assoziativ ist.

Es gibt verschiedenen Konventionen, welche die Reihenfolge angeben beispielsweise:

- „x-Konvention“ (z, x‘, z‘‘)
- „y-Konvention“ (z, y‘, z‘‘)
- Luftfahrnorm (DIN 9300) (z, y‘, x‘‘)

Insgesamt gibt es 12 Verschiedene Konventionen, welche in unterschiedliche Rotationmatrizen resultieren.

Gimbal Lock

Das Gimbal Lock Problem ist bei der Darstellung von Rotationen mittels Euler Rotationen besonders hervorzuheben, da es zu schwerwiegenden Problemen führen kann.

Das Gimbal Lock Problem beschreibt eine besondere Anordnung der einzelnen Drehachsen zueinander, wenn dieses Problem auftaucht hat das System die Möglichkeit verloren, eine der drei Achsen zu drehen, zu diesem Zeitpunkt entsprechen Drehachsen der gleichen Rotation.

Um diesen Zustand zu erreichen müssen sich die einzelnen Drehachsen so bewegen, dass sie auf einer Ebene landen, dann beschreiben zwei verschiedene Drehachsen die gleiche Rotation.

Dieses kann in Computergestützten Navigation Systemen zu Fehlern führen.

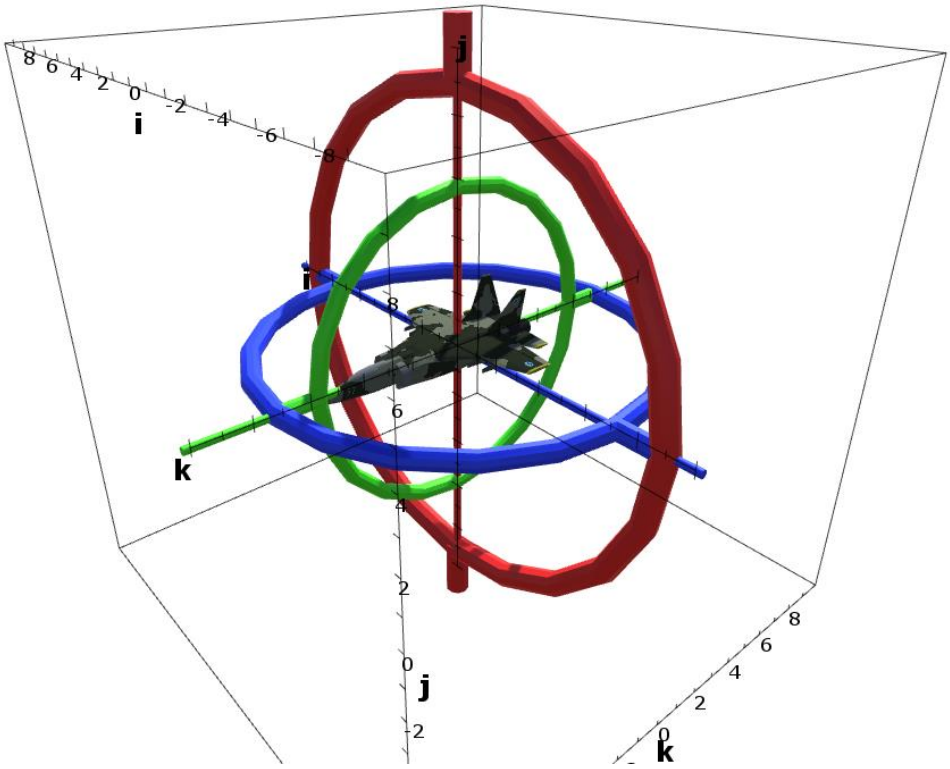


Abbildung 5: Die drei verbundenen Drehachsen beschreiben jeweils eine Rotation um eine Achse (i=X, j=Y, k=Z).

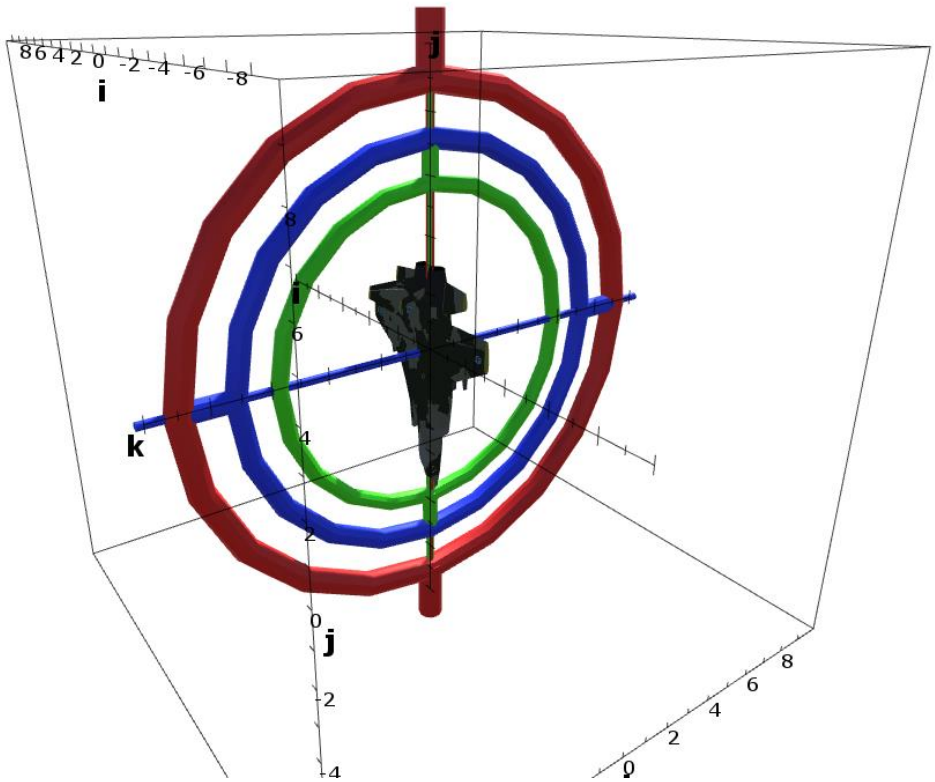


Abbildung 6: Die drei verbundenen Drehachsen können nur noch eine Rotation um die Achsen k=Z, j=Y beschreiben, um i=X kann nicht länger gedreht werden.

Vor- und Nachteile der Euler Rotation

Zu den Vorteilen der Euler Rotation zählen:

- Einfache Mathematik
- Sehr leicht zu verstehen
- Viel Literatur
- Matrizendarstellung kann für Translation, Skalierung oder Projektion genutzt werden

Zu den Nachteilen der Euler Rotation zählen:

- Beliebige Drehung nur selten intuitiv in drei Drehungen aufteilbar
- Reihenfolge der einzelnen Drehungen ist nicht beliebig
- Einzelne Drehung kann durch unterschiedliche Eulerdrehungen ausgedrückt werden
- Interpolation zwischen Drehungen ist schwer anzugeben
- Gimbal Lock

Für viele einfache Anwendungen reicht eine Beschreibung mittels Euler Rotationen aus, jedoch sobald es in Kritische Anwendungen kommt, wie bspw. die Navigation eines Raumschiffes / Flugzeuges kann es Problemen kommen, welche schwierig zu lösen sind.

Rotationsquaternionen

Die Ursprüngliche Motivation zur Entwicklung von Quaternionen war es eine einfache Darstellung zu finden, um Rotationen im 3D-Raum anzugeben.

Rotationen können mittels Quaternionen relativ einfach dargestellt werden, mittels der Hamilton Regeln.

Eine Rotation wird beschrieben durch:

$$q * p * q^{-1}\ bzw.\ q * p * \bar{q}$$
$$falls\ q^{-1}\ Einheitsquaternion\ ist$$

Dabei repräsentiert p den Punkt, welcher rotiert werden soll, und q das korrespondierende Rotationsquaternion.

Um ein Rotationsquaternion zu bilden, werden zwei Komponenten benötigt:

1. Rotationsachse (Achse, um die der Punkt rotiert werden soll; Normiert): $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$
2. Winkel (um wieviel Grad der Punkt um die Achse gedreht werden soll): $\boldsymbol{\theta}$

Das Rotationsquaternion wird wie folgt gebildet:

$$q = \left[cos\left(\frac{\theta}{2}\right), sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Alternative Form:

$$q = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x\ i + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) y\ j + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) z\ k$$

Beispiel für eine Rotation (Bartz, 2001)

Als Beispiel soll der Punkt P (0,2,6) 60° rechtsherum um die z-Achse gedreht werden. Daraus ergeben sich folgende Formeln:

Die Achse um die gedreht werden soll ist $(0{,}0, -1)$.

Als Rotationsquaternion folgt daraus:

$$q = \left[\cos(30), \sin(30) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \cos(30) - 0{,}5k$$

Der Punkt, der gedreht werden soll, ist anzugeben in der Form:

$$\mathrm{p} = \left[0, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 2j + 6k$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} q * p * \bar{q} &= (\cos(30) - 0{,}5k) * (2j + 6k) * (\cos(30) + 0{,}5k) \\ &= (2j * \cos(30) + 6\mathrm{k} * \cos(30) - 0{,}5\mathrm{k} * 2\mathrm{j} - 0{,}5\mathrm{k} * 6\mathrm{k}) * (\cos(30) + 0{,}5k) \\ &= (2j * \cos(30) + 6\mathrm{k} * \cos(30) + \mathrm{i} + 3) * (\cos(30) + 0{,}5k) \\ &= 2j * \cos^2(30) + 6k * \cos^2(30) + i * \cos(30) + 3 * \cos(30) + 2j * 0{,}5k * \cos(30) + 3k^2 \\ &\quad * \cos(30) + i * 0{,}5k + 1{,}5k \\ &= 2j * \cos^2(30) + 6k * \cos^2(30) + i * \cos(30) + 3 * \cos(30) + i * \cos(30) - 3 * \cos(30) \\ &\quad - 0{,}5j + 1{,}5k \\ &= i * (2 * \cos(30)) + j * (2 * \cos^2(30) - 0{,}5) + k * (6 * \cos^2(30) + 1{,}5) \\ &= i * \sqrt{3} + j * 1 + k * 6 \end{aligned}$$

Als Ergebnis in Vektorschreibweise ergibt sich für den rotierten Punkt:

$$p' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Um ein Ergebnis zu überprüfen kann, getestet werden ob sich die Länge des Vektors verändert hat.

$$||p|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2 + 6^2} = ||p'||$$

Konkatenation

Um mehrere Rotationen durch eine Rotation darstellen zu können, können Rotationen konkateniert werden. So können zwei Rotationen R_1 und R_2 dargestellt werden durch eine Konkatenation dieser:

$$R = R_2 * R_1 \; werden \; repräsentiert \; durch \; q = q_2 * q_1$$

Somit ergibt sich für eine Rotation folgende Formel:

$$\begin{aligned} q_2 * (q_1 * p * \overline{q_1}) * \overline{q_2} &= (q_2 * q_1) * p * \overline{(\overline{q_1} * \overline{q_2})} \\ &= (q_2 * q_1) * p * \overline{(q_2 * q_1)} \\ &= q * p * \bar{q} \quad | \quad mit \; q = q_2 * q_1 \end{aligned}$$

Beweis in (Erik B. Dam, 2020).

Vor- und Nachteile von Rotationsquaternion

Zu den Vorteilen der Rotationsquaternion zählen:

- Intuitive / direkte Drehung um Drehachse
- Eindeutige Drehung
- Gimbal Lock existiert nicht
- Rotationen und Konkatenation ist effizienter
    - Bei 3x3-Matrix: 27 Multiplikationen
      18 Additionen
    - Bei Quaternionen: 8 Multiplikationen
      4 Divisionen
- Höhere Genauigkeit

Zu den Nachteilen der Rotationsquaternion zählen:

- Quaternionen können nur Rotationen realisieren
- Nicht komplett intuitive Mathematik
- Nicht standardmäßig in der Literatur berücksichtigt

Rotationsquaternionen sind am besten da einzusetzen, wo eine Darstellung mittels Euler Rotation schwierig wird, und die Eindeutigkeit der Rotation gefordert ist. Die Vorteile von Quaternionen treten besonders zutage sobald es sich um Anwendungen handelt, wo viele Rotationen nacheinander berechnet werden müssen, da sie sowohl schneller berechnet werden können als in Euler Darstellung, als auch das Probleme, wie Grimbal Lock nicht auftreten. Grenzen von Rotationsquaternionen ergeben sich sobald nicht nur Rotationen berechnet werden müssen sondern auch Translationen oder Skalierungen, da hierbei eine Umformung in Matrixform von Nöten ist.

Lineare Interpolation /Spherical Linear Interpolation

Bei LERP und SLERP handelt es sich um zwei verschiedene Anwendungsbeispiele aus der Computergrafik für Quaternionen, dabei ist das zu lösende Problem eine Interpolation zwischen zwei Punkten auf einer Kugel- oder Kugelartigen Oberfläche.

Beispielsweise eine Kamerafahrt zwischen zwei Positionen auf einer Kugeloberfläche oder der Sonnenverlauf über einer Szene.

Die Erste Lösung dieses Problems bilden die LERPs, welche eine komponentenweise Lineare Interpolation zwischen Start- und Zielpunkt bilden.

Die Darstellung mittels Quaternionen sieht wie folgt aus:

$$q(\Delta t) = LERP(q_1, q_2, \Delta t) = (1 - \Delta t) * q_1 + \Delta t * q_2$$

Dabei werden Einzelschritte im Abstand von Δt berechnet, je kleiner Δt gewählt wird desto mehr Punkte werden zwischen Start- und Zielpunkt interpoliert. Mittels Normierung werden die Punkte wieder auf die Oberfläche angepasst.

Dieser Ansatz hat jedoch das Problem, dass die berechneten Positionen auf der Kugeloberfläche nicht äquidistant zueinander sind, wie im unteren Bild zu sehen.

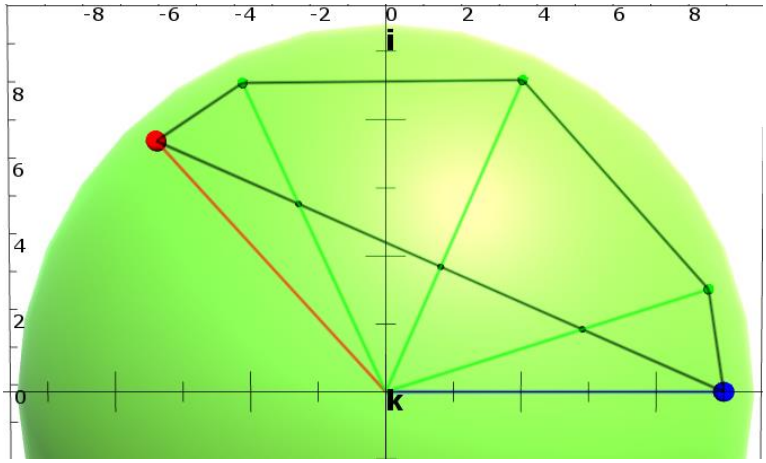


Abbildung 7: LERP (nicht äquidistant Entfernung zwischen Punkten auf der Kugeloberfläche)

Dieses Problem haben die SLERPs nicht, dabei wird in äquidistanten Winkelschritten zwischen den Start- und Zielpunkt interpolieren. Somit ergeben sich auf der Kugeloberfläche Punkte mit gleicher Distanz zueinander.

$$\mathrm{q(t)} = \mathrm{SLERP(q1, q2, t)} = \frac{\sin\big((1-\mathrm{t})\omega\big)}{\sin(\omega)} q1 + \frac{\sin(t\,\omega)}{\sin(\omega)} q2$$

$\omega\ ist\ Winkel\ zwischen\ den\ Quaternionen$

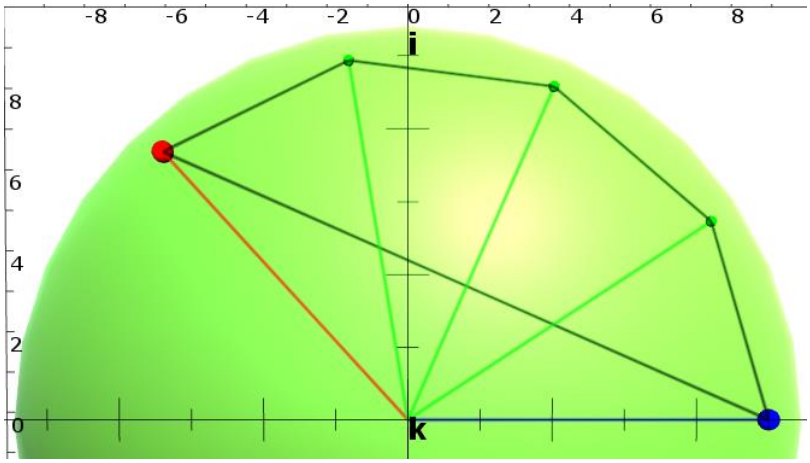


Abbildung 8: SLERP (äquidistant Entfernung zwischen Punkten auf der Kugeloberfläche)

Verweise

Ahn, S. H. (2012). *Quaternion*. Von Quaternion: http://www.songho.ca/math/quaternion/quaternion.html abgerufen

Bartz, M. (12. 4 2001). *Uni Koblenz*. Von https://www.uni-koblenz.de/~cg/veranst/ws0001/sem/Bartz.pdf abgerufen

Cone83. (16. Dezember 2017). *wikimedia.org*. Von wikimedia.org: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Inscription_on_Broom_Bridge_(Dublin)_regarding_the_discovery_of_Quaternions_multiplication_by_Sir_William_Rowan_Hamilton.jpg abgerufen

Erik B. Dam, M. K. (20. 2 2020). *Internet Archive.* Von https://archive.org/details/Erik_B_Dam_Martin_Koch_and_Martin_Lillholm___Quaternions_Interpolation_and_Animation/page/n1/mode/2up abgerufen

Hanson, A. J. (Dezember 2005). *Visualizing Quaternions.*

Ledoux, T. (30. 4 2011). *Quaternionen*. Von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~lschwach/SS11/Seminar_II/Quaternionen.pdf abgerufen

Unterweger, M. (19. 2 2020). *2D-Visualisierung komplexer Funktione*. Von 2D-Visualisierung komplexer Funktione: https://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/komplex2d/Komplexe-Funktionen-2D.pdf abgerufen

Wikipedia. (11. 2 2020). *William Rowan Hamilton*. Von William_Rowan_Hamilton: https://de.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton abgerufen

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Darstellung einer Komplexen Zahl in 2D (Unterweger, 2020) 2
Abbildung 2: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) (Hanson, Dezember 2005) 3
Abbildung 3: Gedenkplatte an der Broome Bridge in Dublin (Hanson, Dezember 2005) (Cone83, 2017) 3
Abbildung 4: Addition von zwei Vektoren in 2D ist äquivalent zu einer Addition von zwei Quaternionen in 4D 8
Abbildung 5: Die drei verbundenen Drehachsen beschreiben jeweils eine Rotation um eine Achse (i=X, j=Y, k=Z). 12
Abbildung 6: Die drei verbundenen Drehachsen können nur noch eine Rotation um die Achsen k=Z, j=Y beschreiben, um i=X kann nicht länger gedreht werden. 12
Abbildung 7: LERP (nicht äquidistant Entfernung zwischen Punkten auf der Kugeloberfläche) 17
Abbildung 8: SLERP (äquidistant Entfernung zwischen Punkten auf der Kugeloberfläche) 18