Unentscheidbare Probleme in der Praxis

von Henning Brandt

Agenda

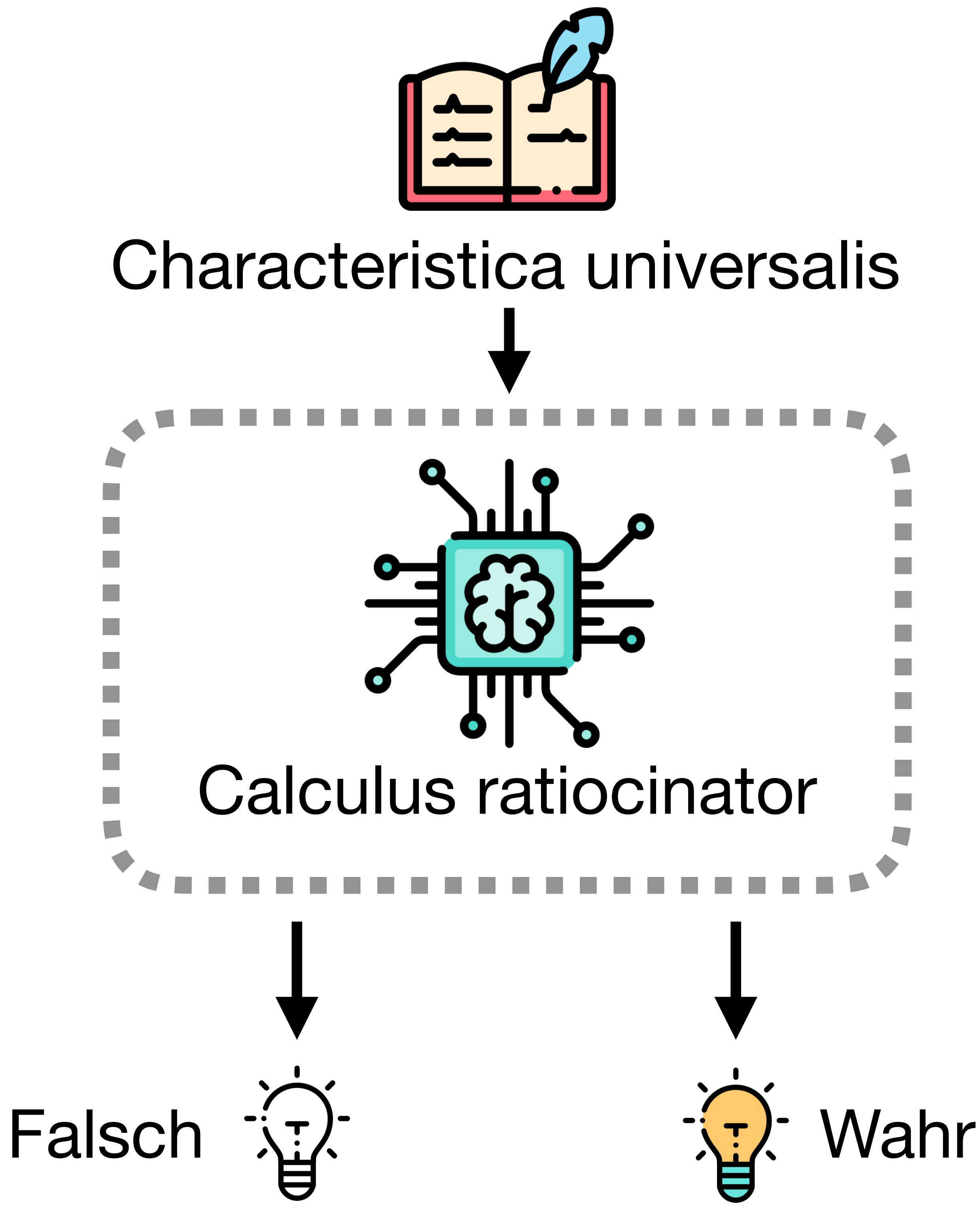
Unentscheidbarkeit in der Praxis

- Einleitung
- Grundlagen
- Entscheidungsproblem
- Berechenbarkeit
- Unentscheidbare Probleme
- Fazit

Leibniz Traum

Einleitung

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 — 1716)



Satz von Cantor

Grundlagen

$f(0)$	0,	5	2	8	0	1	$\cdots$
$f(1)$	0,	6	3	4	8	0	$\cdots$
$f(2)$	0,	3	1	3	3	6	$\cdots$
$f(3)$	0,	1	4	5	3	2	$\cdots$
$f(4)$	0,	9	0	3	3	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Satz von Cantor

Grundlagen

$f(0)$	0,	5	2	8	0	1	$\cdots$
$f(1)$	0,	6	3	4	8	0	$\cdots$
$f(2)$	0,	3	1	3	3	6	$\cdots$
$f(3)$	0,	1	4	5	3	2	$\cdots$
$f(4)$	0,	9	0	3	3	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & falls\ f(i)_i \neq 0 \\ 1, & falls\ f(i)_i = 0 \end{cases}$$

Satz von Cantor

Grundlagen

$f(0)$	0,	5	2	8	0	1	$\cdots$
$f(1)$	0,	6	3	4	8	0	$\cdots$
$f(2)$	0,	3	1	3	3	6	$\cdots$
$f(3)$	0,	1	4	5	3	2	$\cdots$
$f(4)$	0,	9	0	3	3	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0, 0 0 0 0 1 . . .

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & falls\ f(i)_i \neq 0 \\ 1, & falls\ f(i)_i = 0 \end{cases}$$

Satz von Cantor

Grundlagen

$f(0)$	0,	5	2	8	0	1	$\cdots$
$f(1)$	0,	6	3	4	8	0	$\cdots$
$f(2)$	0,	3	1	3	3	6	$\cdots$
$f(3)$	0,	1	4	5	3	2	$\cdots$
$f(4)$	0,	9	0	3	3	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0, 0 0 0 0 1 . . .

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & falls\ f(i)_i \neq 0 \\ 1, & falls\ f(i)_i = 0 \end{cases}$$

Satz von Cantor

Für jede Menge M ist die Potenzmenge 2^M mächtiger als M.

Satz von Cantor

Grundlagen

$f(0)$	0,	5	2	8	0	1	$\cdots$
$f(1)$	0,	6	3	4	8	0	$\cdots$
$f(2)$	0,	3	1	3	3	6	$\cdots$
$f(3)$	0,	1	4	5	3	2	$\cdots$
$f(4)$	0,	9	0	3	3	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

0, 0 0 0 0 1 . . .

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \mathit{falls}\ f(i)_i \neq 0 \\ 1, & \mathit{falls}\ f(i)_i = 0 \end{cases}$$

Satz von Cantor

Für jede Menge M ist die Potenzmenge 2^M mächtiger als M.

$$|\mathbb{N}| < \left|2^{\mathbb{N}}\right| < \left|2^{2^{\mathbb{N}}}\right| < \left|2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}\right| < \ldots$$

Formale Sprachen

Grundlagen

Formale Sprachen

Grundlagen

Ein Alphabet

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Formale Sprachen

Ein Alphabet

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$$

Formale Sprachen

Grundlagen

Ein Alphabet

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$$

Das leere Wort

$$\epsilon \in \Sigma^* \quad \epsilon w = w\epsilon = w \text{ **für alle** } w \in \Sigma^*$$

Formale Sprachen

Grundlagen

Ein Alphabet

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$$

Das leere Wort

$\epsilon \in \Sigma^* \quad \epsilon w = w\epsilon = w$ **für alle** $w \in \Sigma^*$

Die Menge aller nichtleeren Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\epsilon\}$$

Formale Sprachen

Grundlagen

Ein Alphabet

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$$

Das leere Wort

$$\epsilon \in \Sigma^* \quad \epsilon w = w\epsilon = w \text{ **für alle** } w \in \Sigma^*$$

Die Menge aller nichtleeren Wörter über einem Alphabet

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\epsilon\}$$

Eine Sprache über einem Alphabet

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Probleme

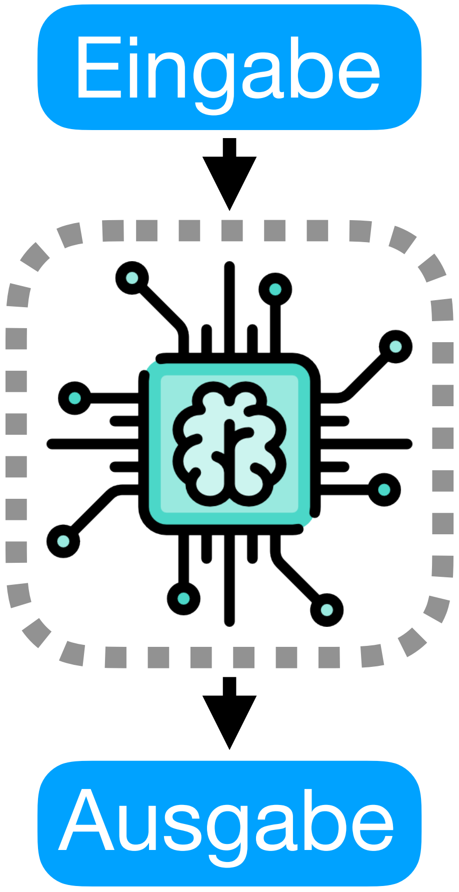
Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.

Probleme

Entscheidungsproblem

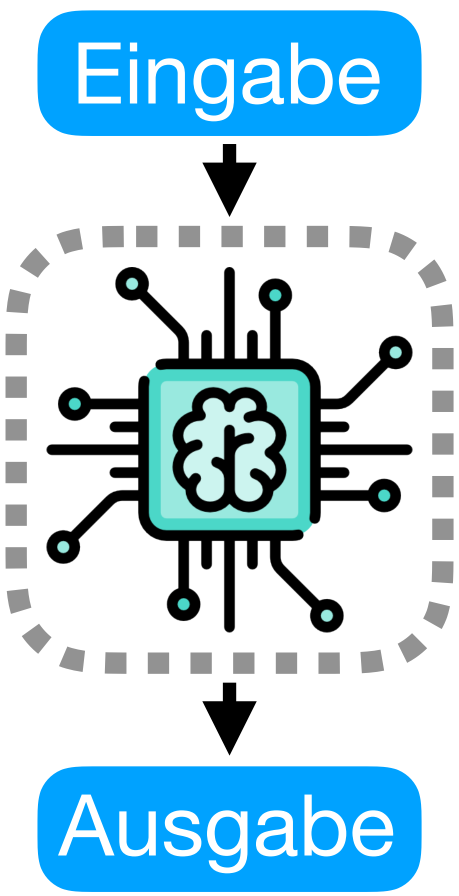
Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.



Probleme

Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.

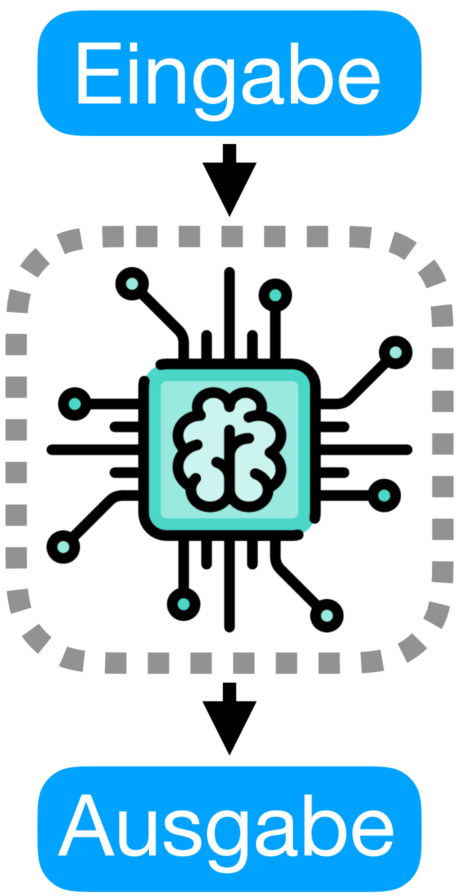


I

Probleme

Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.



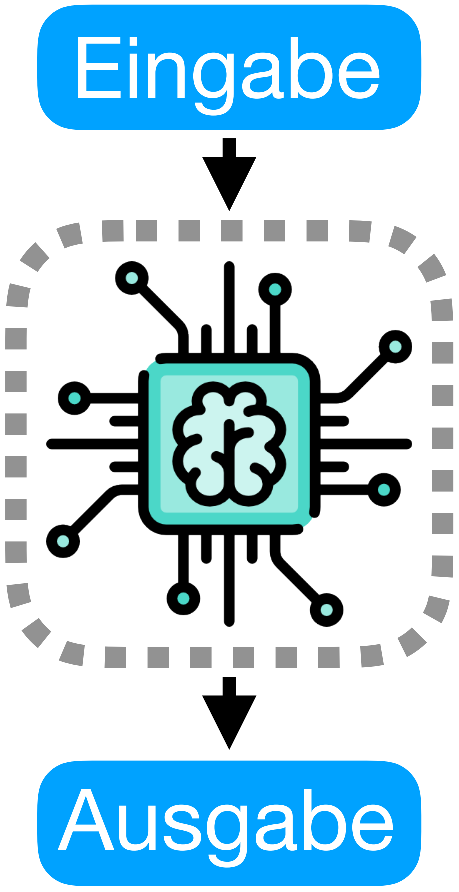
I

O

Probleme

Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.



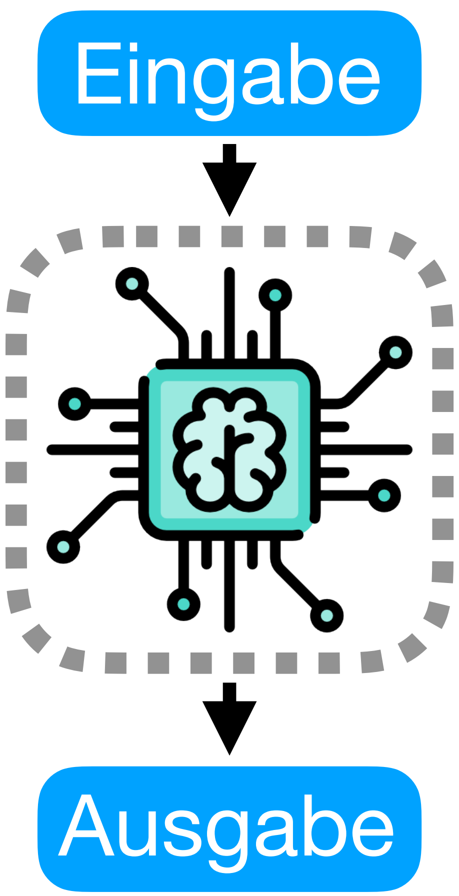
$$P \subseteq I \times O$$

Probleme

Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.

$a \in I$ **und** $b \in O$ **und** $(a, b) \in P \Rightarrow b$ **ist eine Lösung von** a



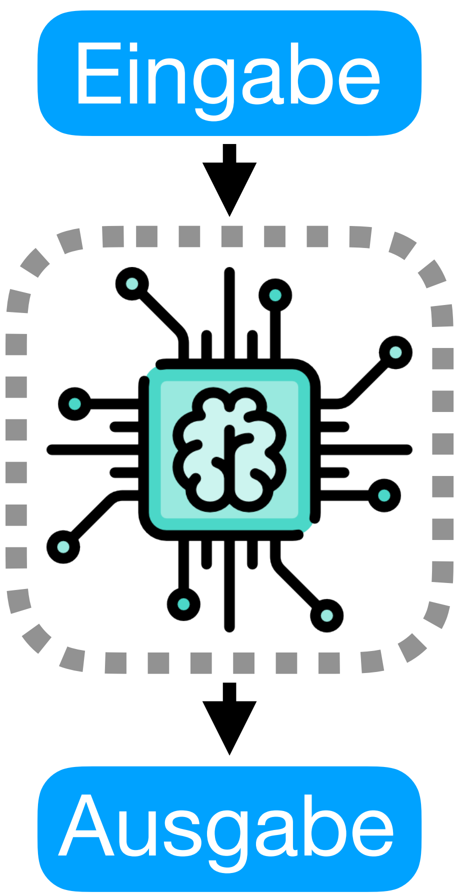
$$P \subseteq I \times O$$

Probleme

Entscheidungsproblem

Allgemeine Aufgabenstellung, für die in konkreten Fällen eine Lösung gesucht wird.

$a \in I$ **und** $b \in O$ **und** $(a, b) \in P \Rightarrow b$ **ist eine Lösung von** a



$P \subseteq I \times O$

Beispiel: Problem der Addition

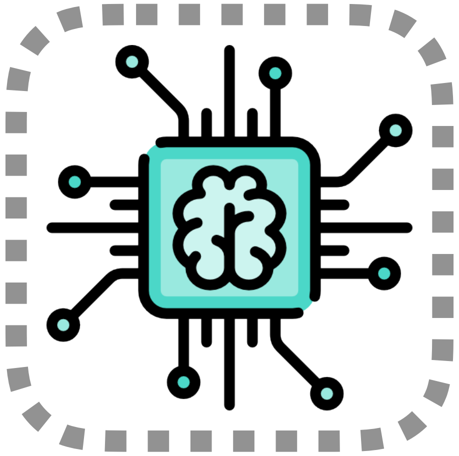
$$I = \mathbb{N}^2$$
$$O = \mathbb{N}$$
$$P = \{((a, b), c) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \mid a + b = c\}$$
$$P = \{((1,1),2), ((1,2),3), ((1,3),4), \ldots\}$$

Entscheidungsprobleme

Entscheidungsproblem

Probleme mit zweiwertiger Lösungsmenge.

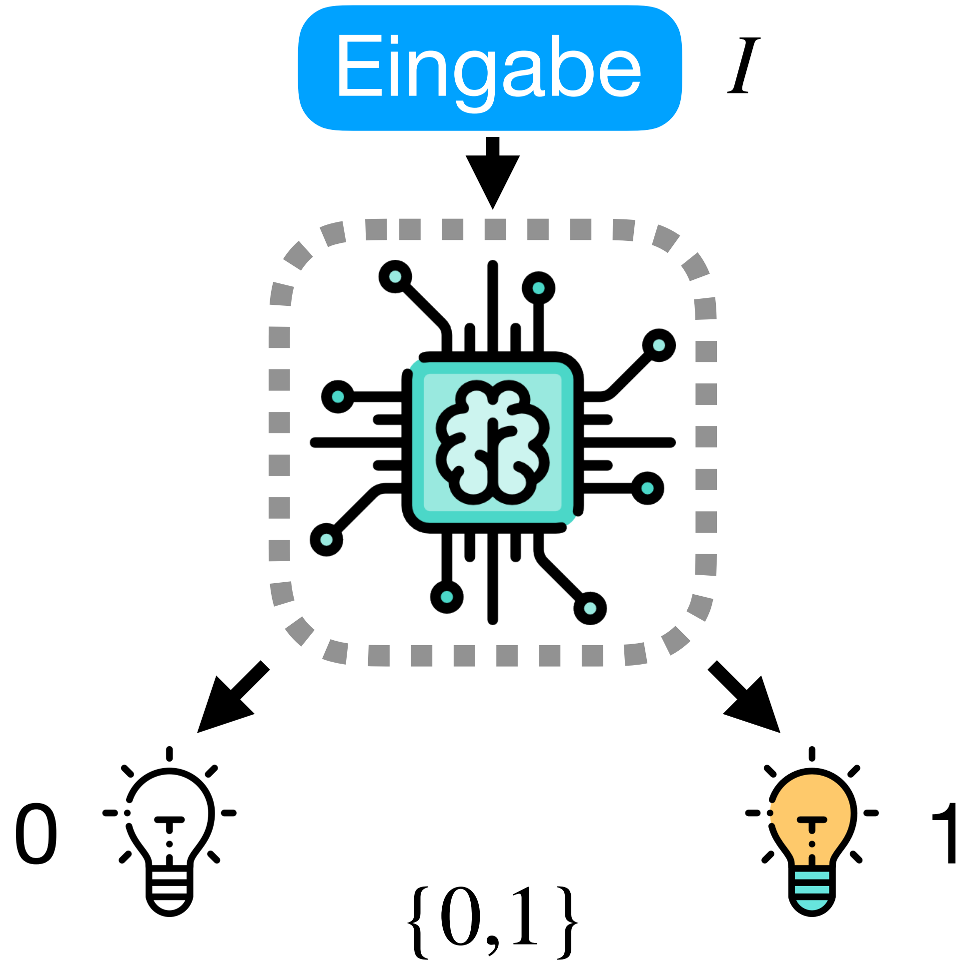
Eingabe I



Entscheidungsprobleme

Entscheidungsproblem

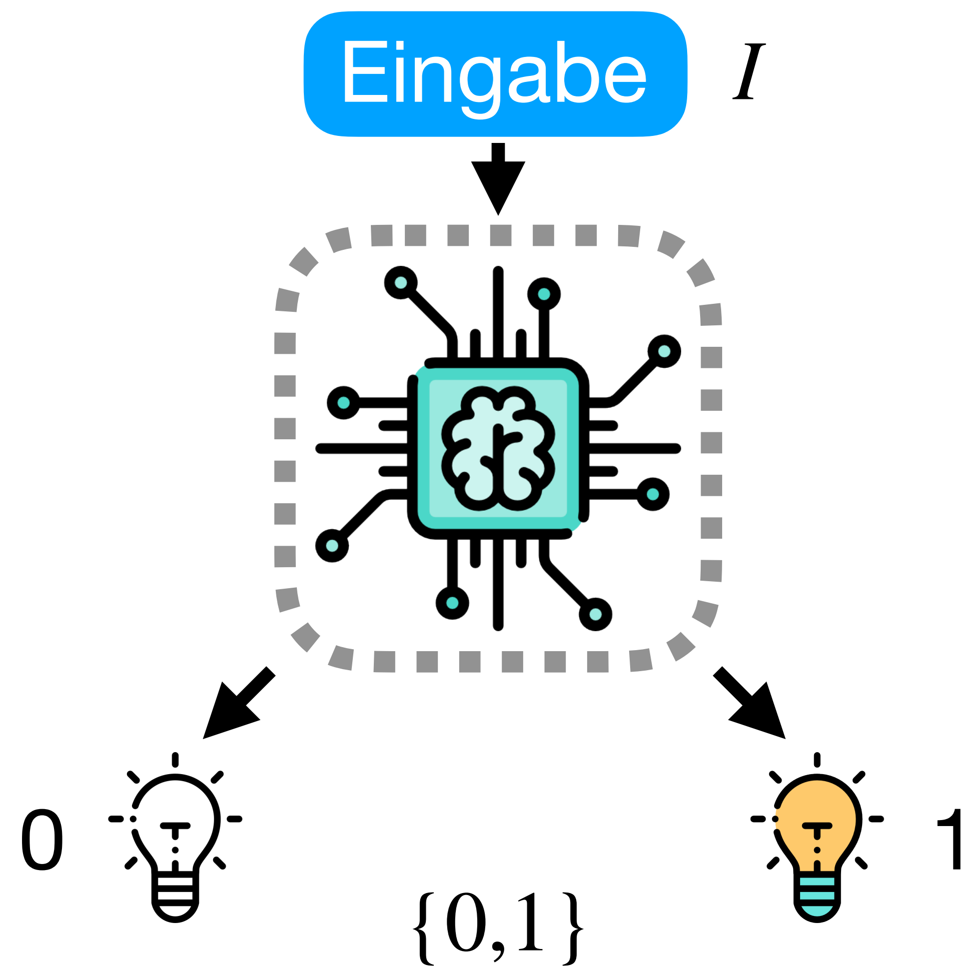
Probleme mit zweiwertiger Lösungsmenge.



Entscheidungsprobleme

Entscheidungsproblem

Probleme mit zweiwertiger Lösungsmenge.



$$P : I \to \{0,1\}$$

Wortproblem

Entscheidungsproblem

Definition: Wortproblem einer formalen Sprache

Zu jeder formalen Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist das zugehörige Wortproblem:

- Gegeben: $\omega \in \Sigma^*$
- Gefragt: Gilt $\omega \in L$

Wortproblem

Entscheidungsproblem

Definition: Wortproblem einer formalen Sprache

Zu jeder formalen Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist das zugehörige Wortproblem:

- Gegeben: $\omega \in \Sigma^*$
- Gefragt: Gilt $\omega \in L$

Entscheidungsproblem als Wortproblem

- Kodierung von $\mathbb{N}$ als Wörter über $\Sigma = \{0,\ldots,9\}$
- Primzahlen bilden formale Sprache: $PRIMES \subseteq \Sigma^*$
- Primzahlproblem = Wortproblem für $PRIMES$

Hilbert'sche Entscheidungsproblem

Entscheidungsproblem

David Hilbert
(1862 — 1943)

Wilhelm Ackermann
(1896 — 1962)

Hilbert’sche Entscheidungsproblem

Entscheidungsproblem

David Hilbert
(1862 — 1943)

Wilhelm Ackermann
(1896 — 1962)

„Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt.“

Hilbert'sche Entscheidungsproblem

Entscheidungsproblem

David Hilbert
(1862 — 1943)

Wilhelm Ackermann
(1896 — 1962)

> "Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt."

Turing-Maschine

Berechenbarkeit

Alan Mathison Turing
(1912 — 1954)

Veröffentlichte 1936 seine Arbeit „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem“, in der er unter Anderem auch seine berühmte Turing-Maschine beschreibt.

Turing-Maschine

Berechenbarkeit

Alan Mathison Turing
(1912 — 1954)

Veröffentlichte 1936 seine Arbeit „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem“, in der er unter Anderem auch seine berühmte Turing-Maschine beschreibt.

$$(S, \Sigma, \Pi, \delta, s_0, \square, E)$$

Eine Turing-Maschine besteht aus

- der endliche *Zustandsmenge* S
- dem endlichen *Eingabealphabet* Σ
- dem endlichen *Bandalphabet* Π **mit** $\Pi \supset \Sigma$
- der *Zustandsübergangsfunktion* $\delta : S \times \Pi \longrightarrow S \times \Pi \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$
- dem *Startzustand* s_0
- dem *Blank-Symbol* $\square \in \Pi \backslash \Sigma$
- der Menge der *Endzustände* $E \subseteq S$

Addieren mit einer Turing-Maschine

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

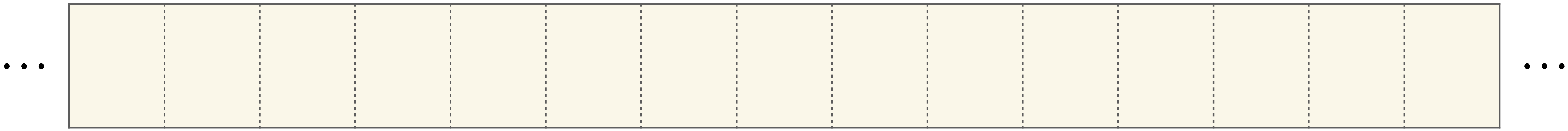
$$\Sigma = \{1,0\}$$

$$\Pi = \{1,0,\square\}$$

$$E = \{s_4\}$$

Addieren mit einer Turing-Maschine

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$



Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$

Addieren mit einer Turing-Maschine

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$

Addieren mit einer Turing-Maschine

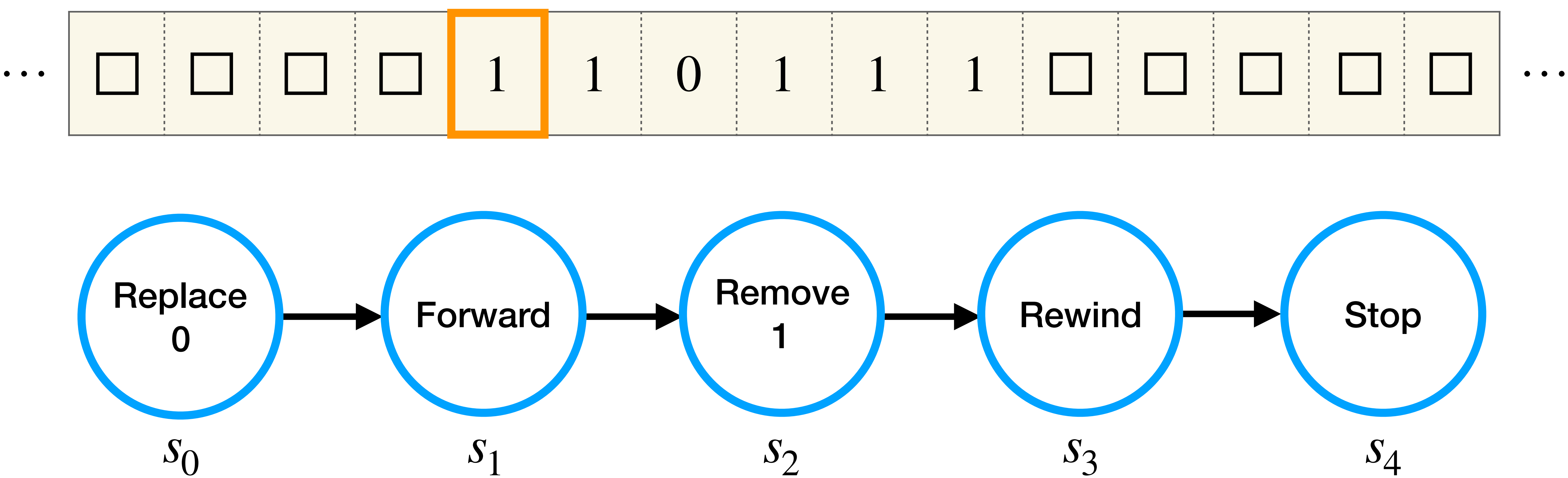
Berechenbarkeit

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$

Addieren mit einer Turing-Maschine

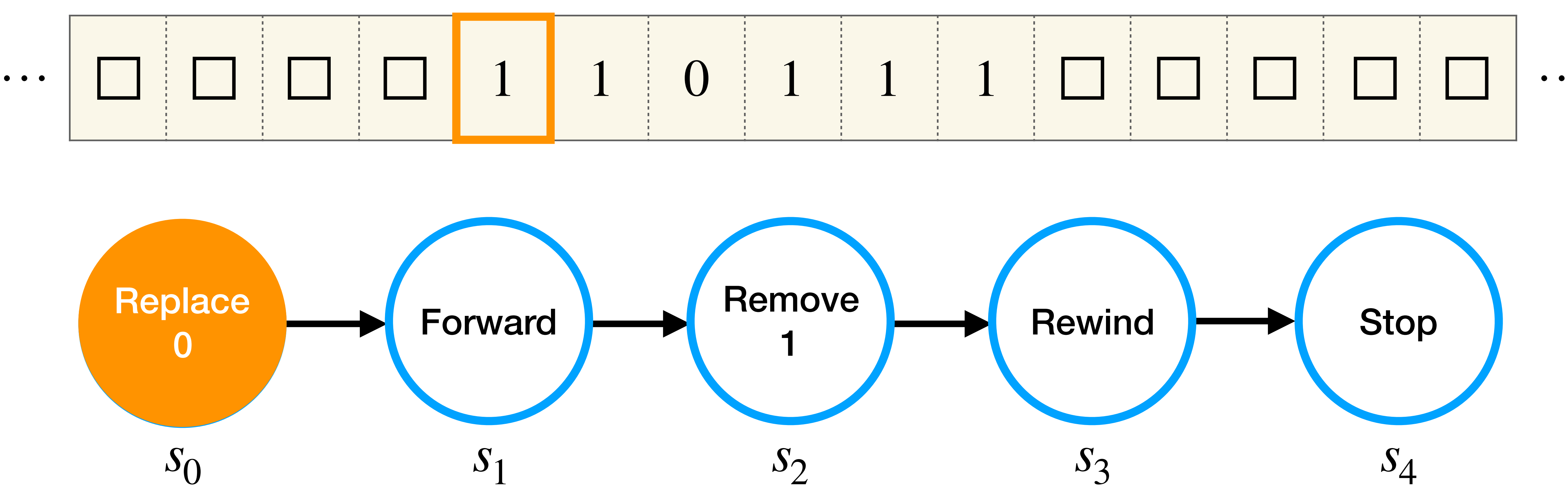
$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$



Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1{,}0\}$$
$$\Pi = \{1{,}0{,}\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$



Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

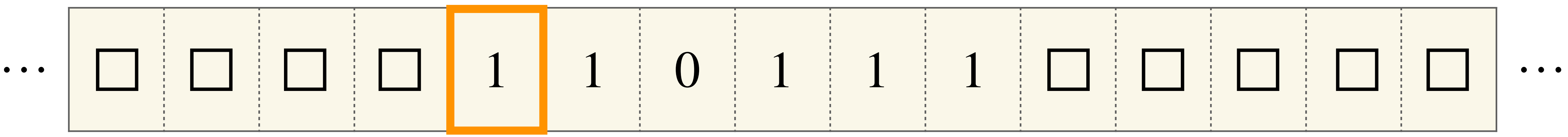
δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

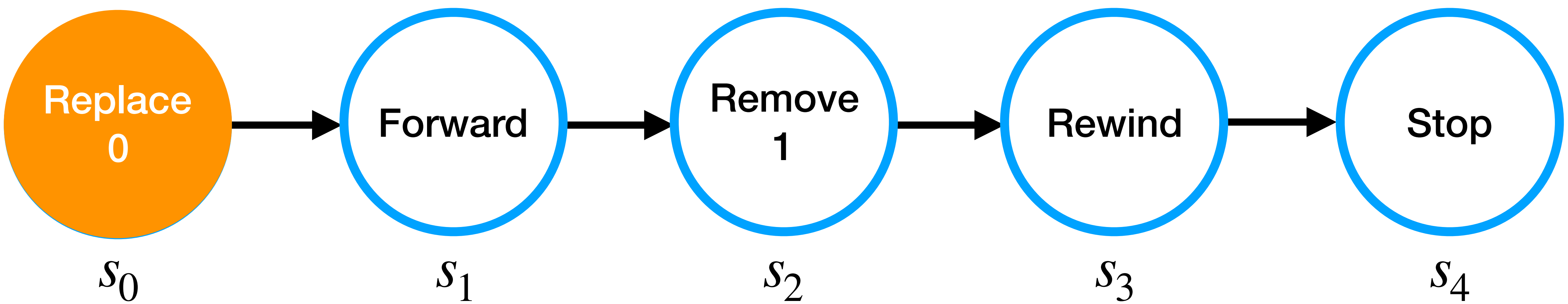
$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\Sigma = \{1, 0\}$$

$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$

$$E = \{s_4\}$$





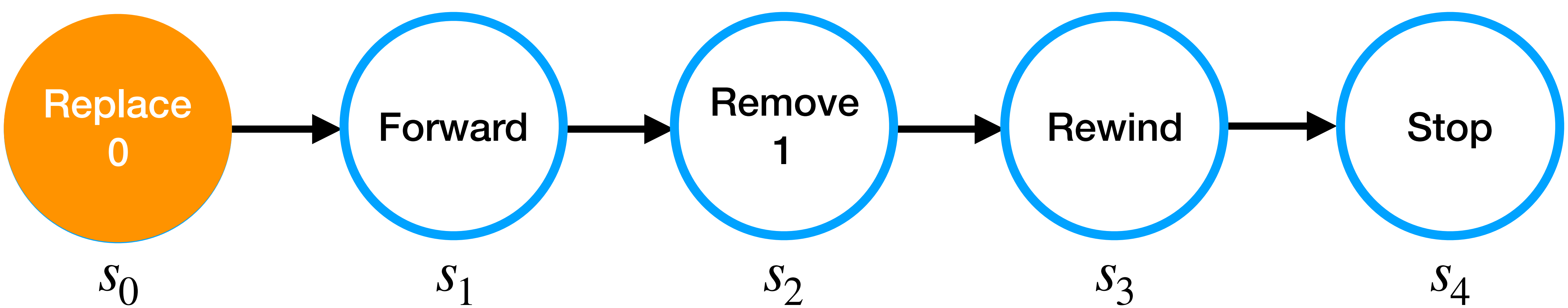
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…

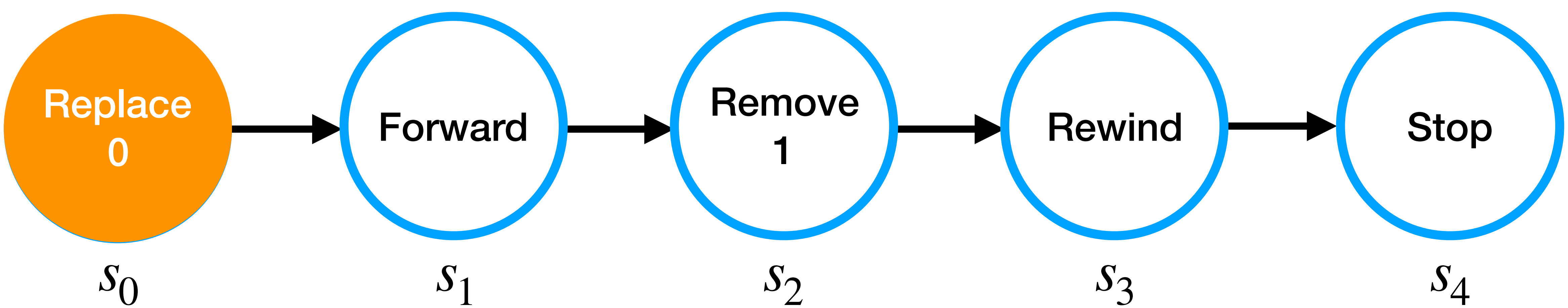


Addieren mit einer Turing-Maschine

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	$-$
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	$-$	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	$-$	$-$
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	$-$	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	$-$	$-$	$-$

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$



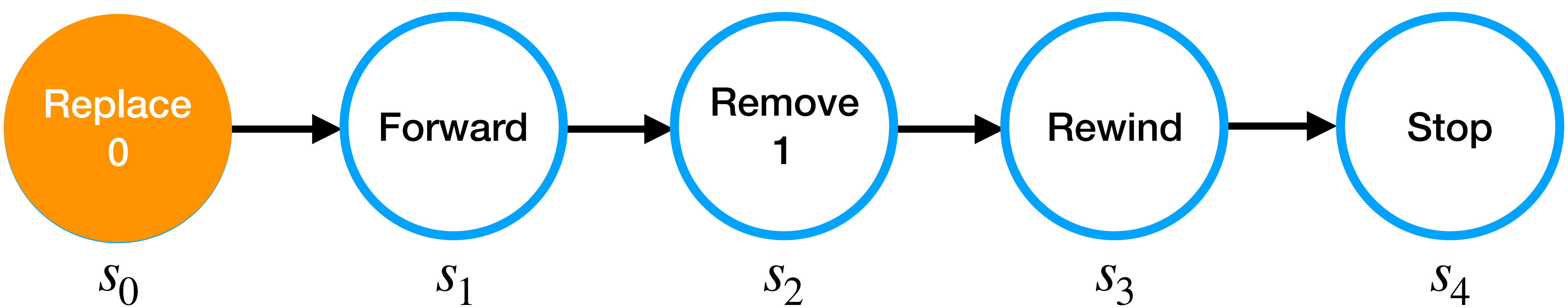
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$\boxed{(s_1, 1, \rightarrow)}$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1,0\}$$
$$\Pi = \{1,0,\square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	$\boxed{0}$	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



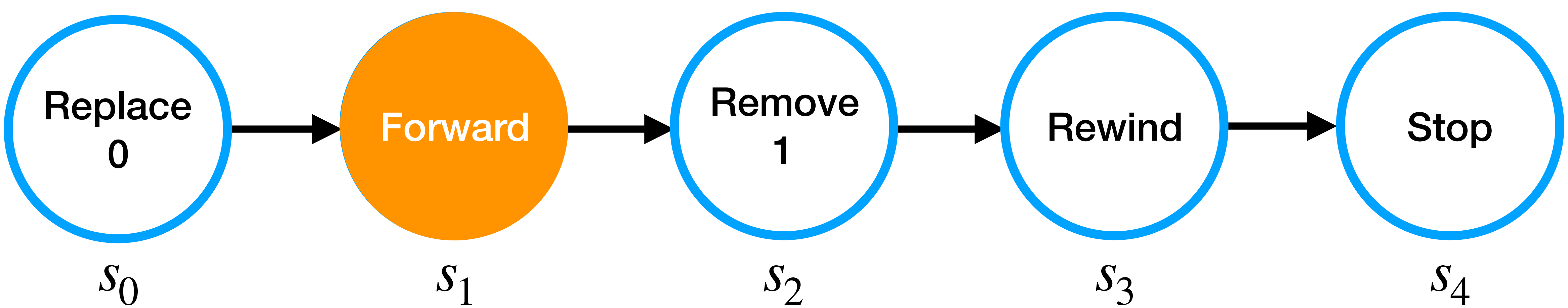
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$\boxed{(s_1, 1, \rightarrow)}$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

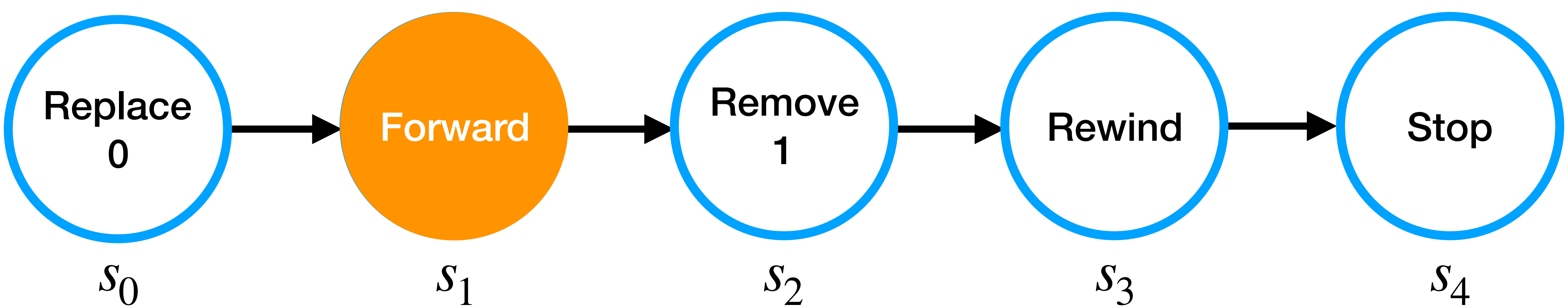
$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$

$\Sigma = \{1, 0\}$

$\Pi = \{1, 0, \square\}$

$E = \{s_4\}$

$\cdots \; \square \; \square \; \square \; \square \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \cdots$

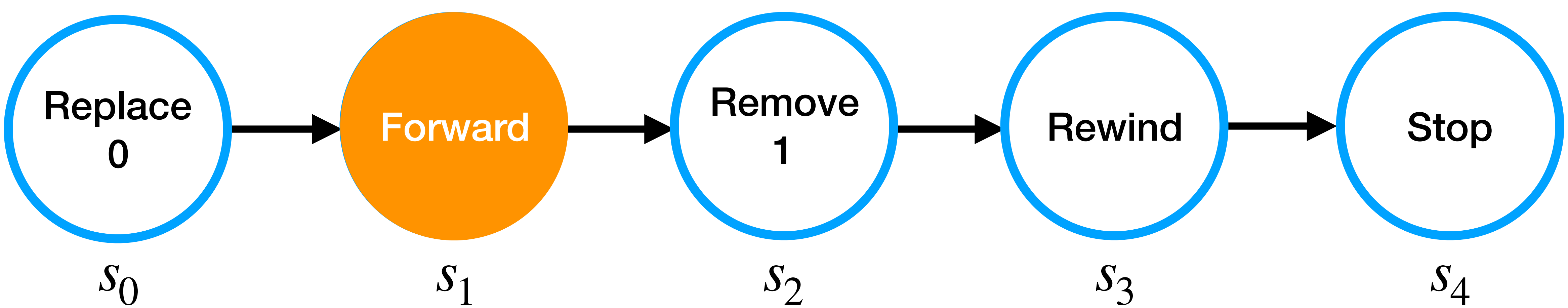


Addieren mit einer Turing-Maschine

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$\boxed{(s_1, 1, \rightarrow)}$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



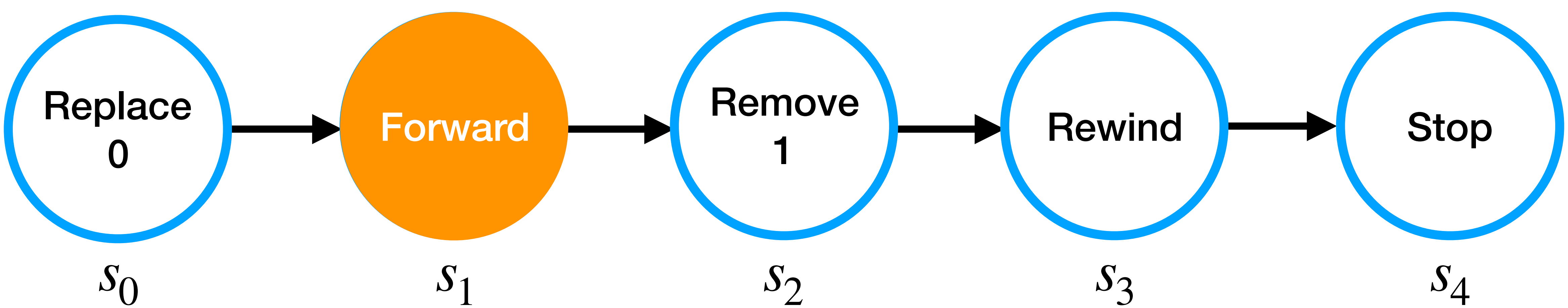
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



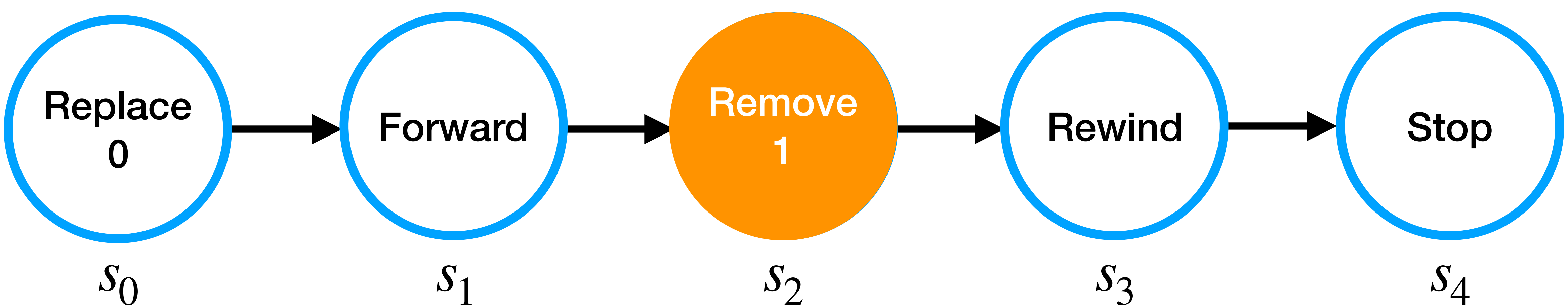
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…															…
…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



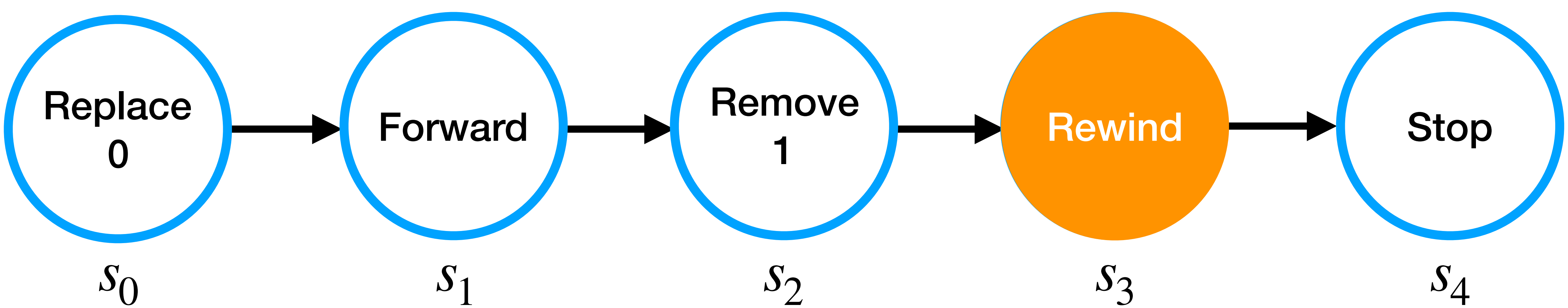
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



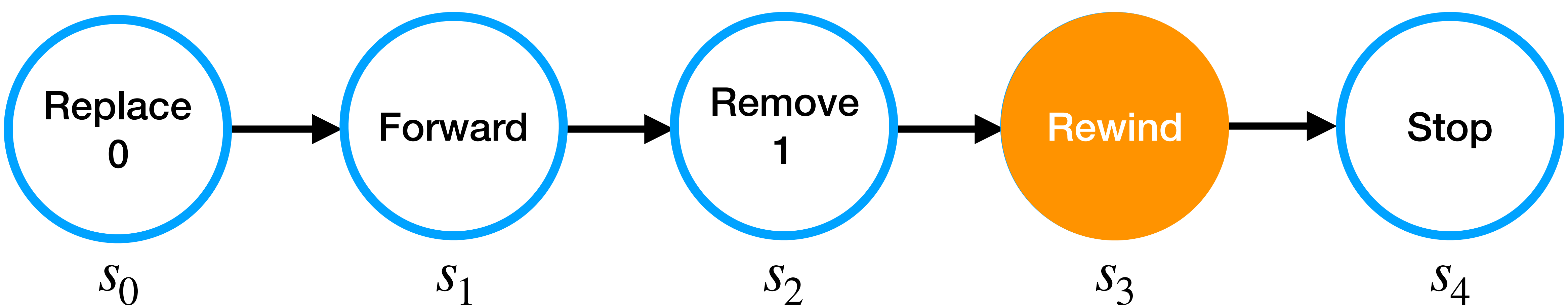
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$\boxed{(s_3, 1, \leftarrow)}$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	$\boxed{1}$	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…

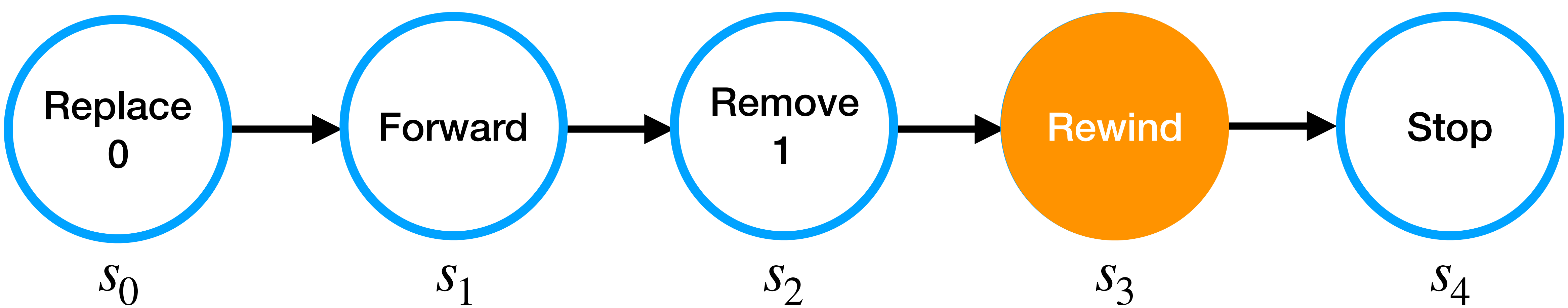


Addieren mit einer Turing-Maschine

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$\boxed{(s_3, 1, \leftarrow)}$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	$\boxed{1}$	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



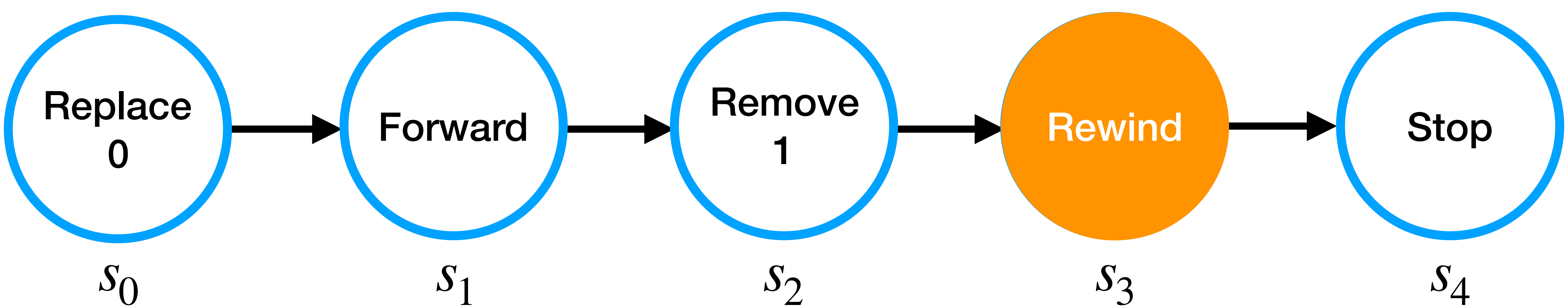
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…

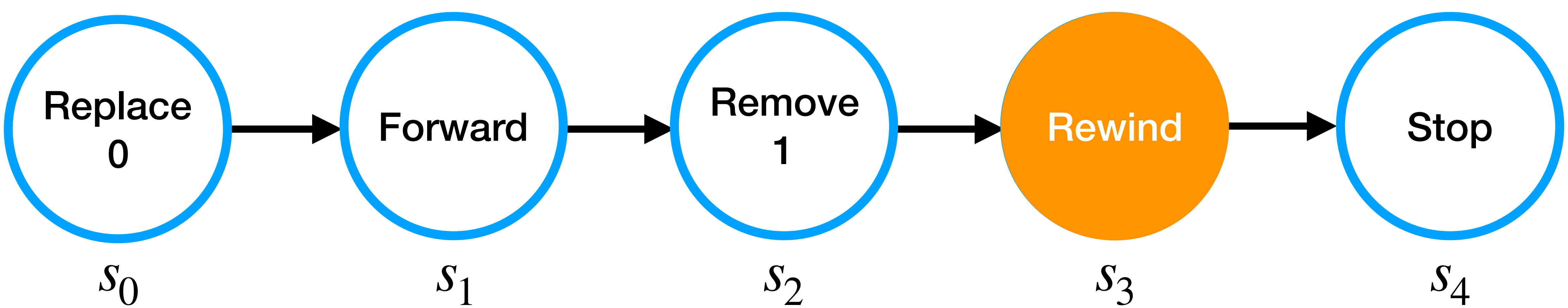


Addieren mit einer Turing-Maschine

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$\boxed{(s_3, 1, \leftarrow)}$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\boxed{1}$	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



Addieren mit einer Turing-Maschine

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

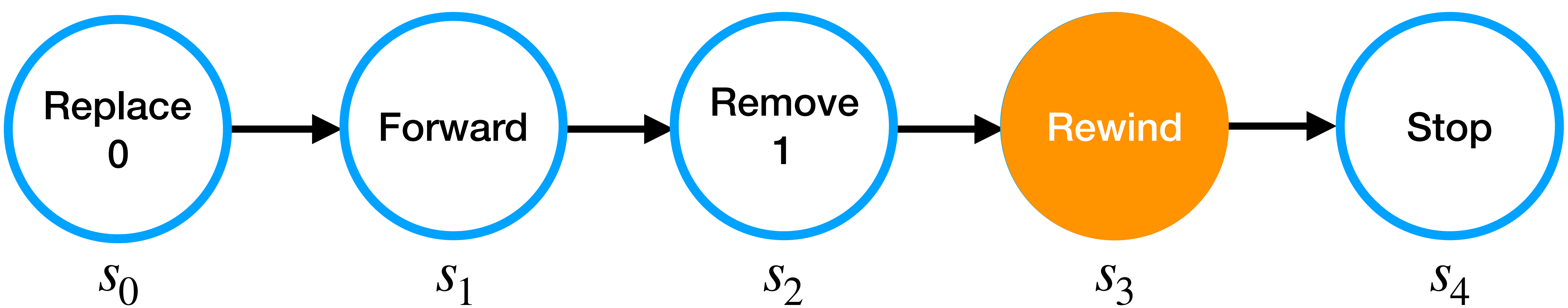
$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\Sigma = \{1, 0\}$$

$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$

$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



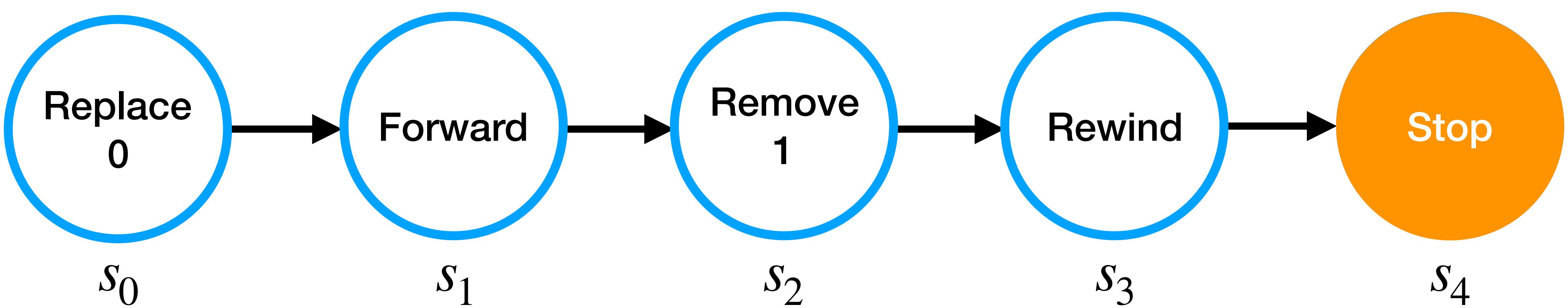
Addieren mit einer Turing-Maschine

Berechenbarkeit

δ	1	0	$\square$
s_0	$(s_0, 1, \rightarrow)$	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—
s_1	$(s_1, 1, \rightarrow)$	—	$(s_2, \square, \leftarrow)$
s_2	$(s_3, \square, \leftarrow)$	—	—
s_3	$(s_3, 1, \leftarrow)$	—	$(s_4, \square, \rightarrow)$
s_4	—	—	—

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$\Sigma = \{1, 0\}$$
$$\Pi = \{1, 0, \square\}$$
$$E = \{s_4\}$$

…	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	…



Turing-Berechenbarkeit

Definition: Turing-Berechenbarkeit

Eine beliebige partielle Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ heißt Turing-berechenbar, falls eine Turing-Maschine T mit folgenden Eigenschaften existiert:

- T terminiert unter Eingabe ω in $s_e \in E$, wenn $f(\omega) \neq \perp$
- In diesem Fall gilt: $(\square, s_0, \omega) \vdash^* (\square^*, s_e, f(\omega)\square^*)$

Definition: Partielle Funktion

Eine partielle Funktion der Form $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ besitzt den eingeschränkten Definitionsbereich $def(f) \subseteq \Sigma^*$, es gilt $f: def(f) \rightarrow \Sigma^*$ mit $x \notin def(f) \Rightarrow f(x) = \perp$

Church'sche These

Berechenbarkeit

- Einseitig beschränkte Turing-Maschine
- Mehrband-Turing-Maschine

- While-Programme
- Goto-Programme
- Registermachine
- Lambda Kalkül

Church'sche These

Berechenbarkeit

- Einseitig beschränkte Turing-Maschine
- Mehrband-Turing-Maschine
- While-Programme
- Goto-Programme
- Registermachine
- Lambda Kalkül

Church'sche These

Berechenbarkeit

Alonzo Church
(1903 — 1995)

- Einseitig beschränkte Turing-Maschine
- Mehrband-Turing-Maschine
- While-Programme
- Goto-Programme
- Registermachine
- Lambda Kalkül

Church'sche These (1936)

Die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen stimmt mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen überein.

Akzeptierende Turing-Maschine

Berechenbarkeit

Definition: Turing-Akzeptanz

Eine Turing-Maschine T akzeptiert das Wort $\omega \in \Sigma^*$, falls sie unter Eingabe von ω in einem Endzustand terminiert. Die von T akzeptierte Sprache $L(T)$ ist definiert als

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$

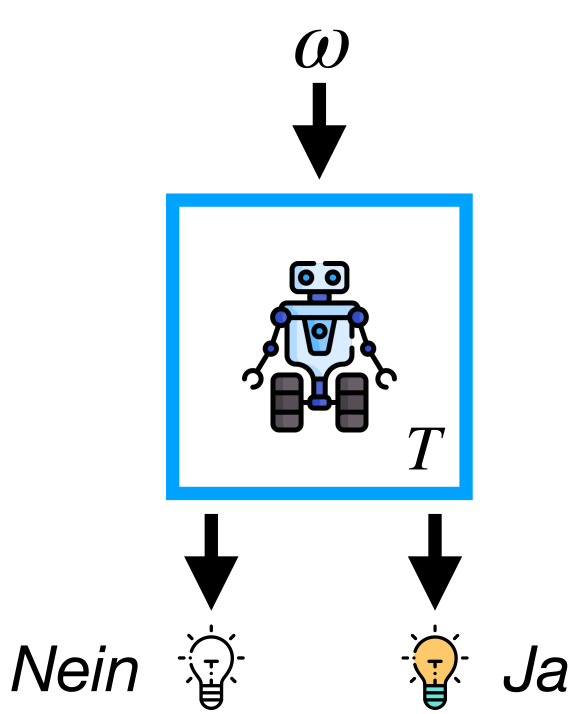
Akzeptierende Turing-Maschine

Berechenbarkeit

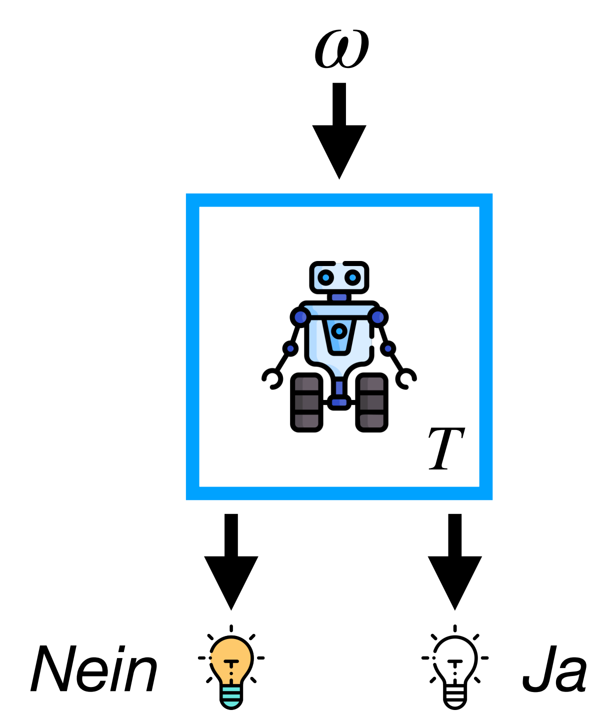
Definition: Turing-Akzeptanz

Eine Turing-Maschine T akzeptiert das Wort $\omega \in \Sigma^*$, falls sie unter Eingabe von ω in einem Endzustand terminiert. Die von T akzeptierte Sprache $L(T)$ ist definiert als

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$



Wort akzeptiert



Wort abgelehnt

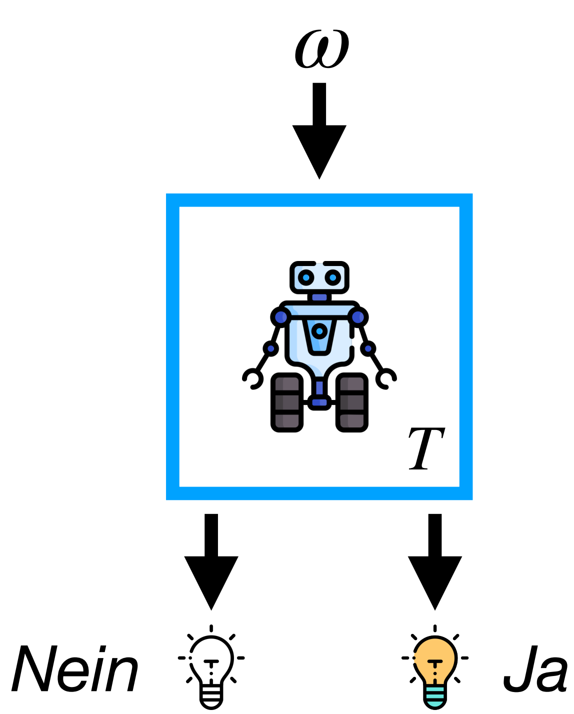
Akzeptierende Turing-Maschine

Berechenbarkeit

Definition: Turing-Akzeptanz

Eine Turing-Maschine T akzeptiert das Wort $\omega \in \Sigma^*$, falls sie unter Eingabe von ω in einem Endzustand terminiert. Die von T akzeptierte Sprache $L(T)$ ist definiert als

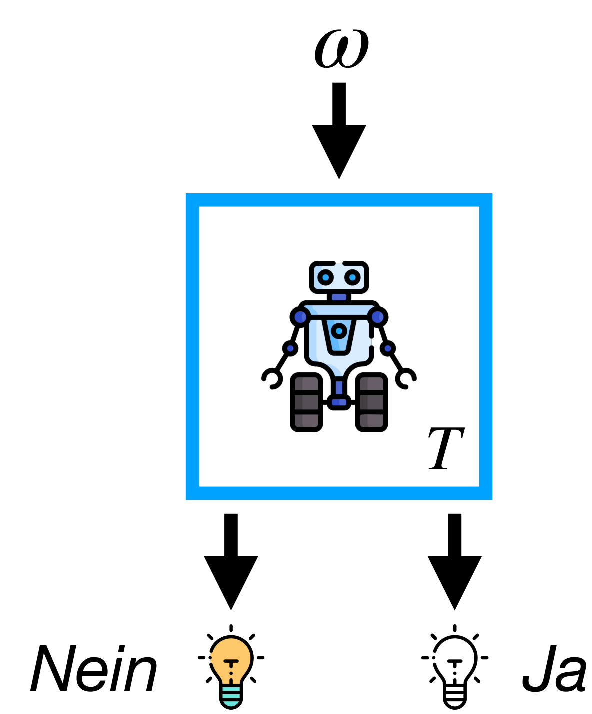
$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$



Wort akzeptiert

Erinnerung: Wortproblem

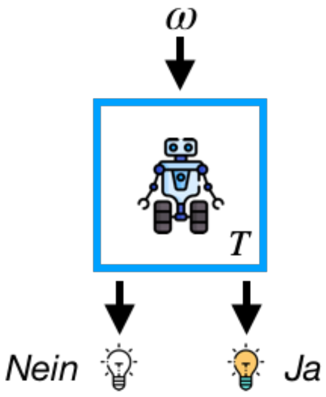
$\omega \in L$



Wort abgelehnt

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme

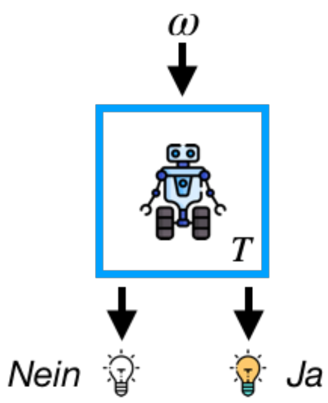


Wort akzeptiert

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



Wort akzeptiert

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$

Gödelisierung

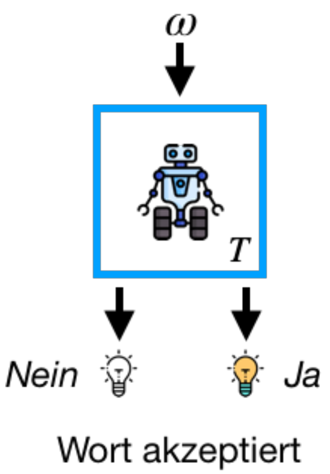
$$g : M_T \to \mathbb{N}$$

$$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$$

Bildmenge $c(M_T)$ ist entscheidbar

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T$ **akzeptiert** $\omega\}$

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

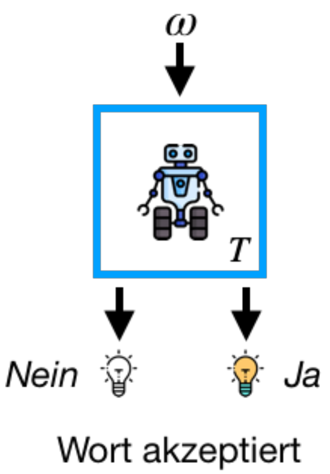
$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T$ **akzeptiert** $\omega\}$

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

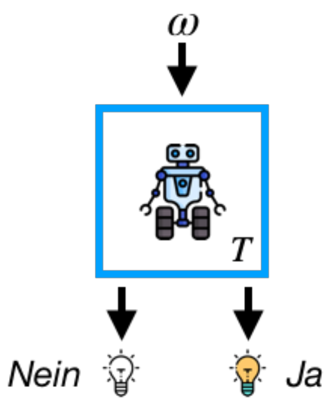
Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Sprachen

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



Wort akzeptiert

$L(T) :=$ {$\omega \in \Sigma^*$ | T **akzeptiert** ω}

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

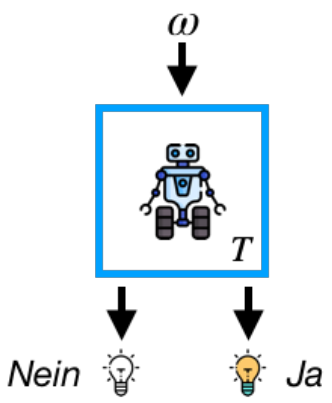
$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Sprachen

Σ^* **ist abzählbar**

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



Wort akzeptiert

$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T$ **akzeptiert** $\omega\}$

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

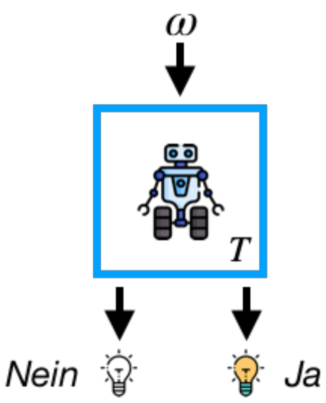
Sprachen

Σ^* **ist abzählbar**

$L \subseteq \Sigma^*$

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



Wort akzeptiert

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$

Gödelisierung

$g : M_T \rightarrow \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \rightarrow M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Sprachen

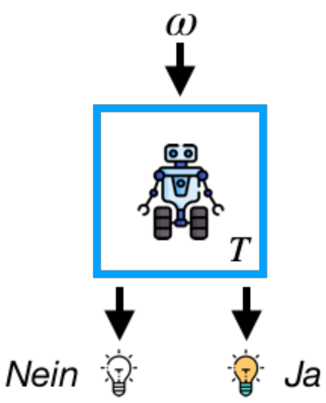
Σ^* **ist abzählbar**

$L \subseteq \Sigma^*$

2^{Σ^*}

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



Wort akzeptiert

$$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T \textbf{ akzeptiert } \omega\}$$

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Sprachen

Σ^* **ist abzählbar**

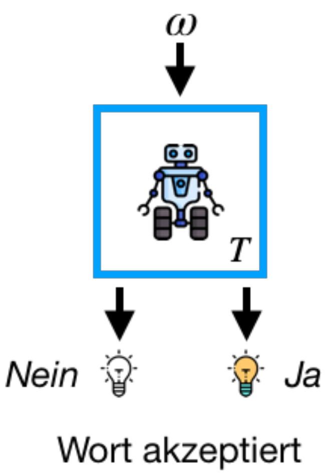
$L \subseteq \Sigma^*$

2^{Σ^*}

$\Rightarrow$ 2^{Σ^*} **ist überabzählbar**

Existenz unentscheidbarer Probleme

Unentscheidbare Probleme



$L(T) := \{\omega \in \Sigma^* \mid T$ **akzeptiert** $\omega\}$

Gödelisierung

$g : M_T \to \mathbb{N}$

$g^{-1} : g(M_T) \to M_T$

Bildmenge $c(M_T)$ **ist entscheidbar**

$\Rightarrow$ M_T **ist abzählbar**

Sprachen

Σ^* **ist abzählbar**

$L \subseteq \Sigma^*$

2^{Σ^*}

$\Rightarrow$ 2^{Σ^*} **ist überabzählbar**

Allgemeines Halteproblem

Definition: Allgemeines Halteproblem

Das *allgemeine Halteproblem* lautet wie folgt:

- Gegeben: Turing-Maschine T und Eingabewort ω
- Gefragt: Terminiert T unter Eingabe von ω ?

Allgemeines Halteproblem

Definition: Allgemeines Halteproblem

Das *allgemeine Halteproblem* lautet wie folgt:

- Gegeben: Turing-Maschine T und Eingabewort ω
- Gefragt: Terminiert T unter Eingabe von ω ?

Satz: Turing, 1936

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Allgemeines Halteproblem

Unentscheidbare Probleme

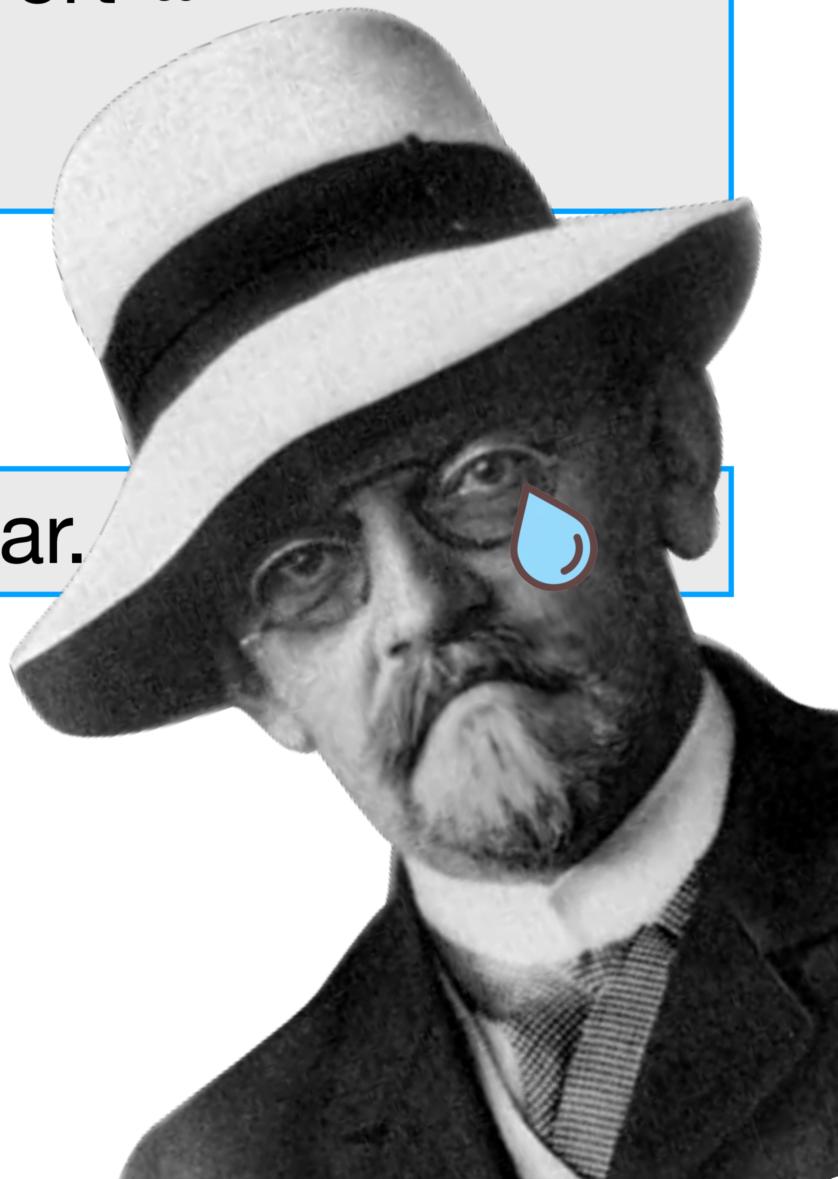
Definition: Allgemeines Halteproblem

Das *allgemeine Halteproblem* lautet wie folgt:

- Gegeben: Turing-Maschine T und Eingabewort ω
- Gefragt: Terminiert T unter Eingabe von ω ?

Satz: Turing, 1936

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.



Allgemeines Halteproblem

Unentscheidbare Probleme

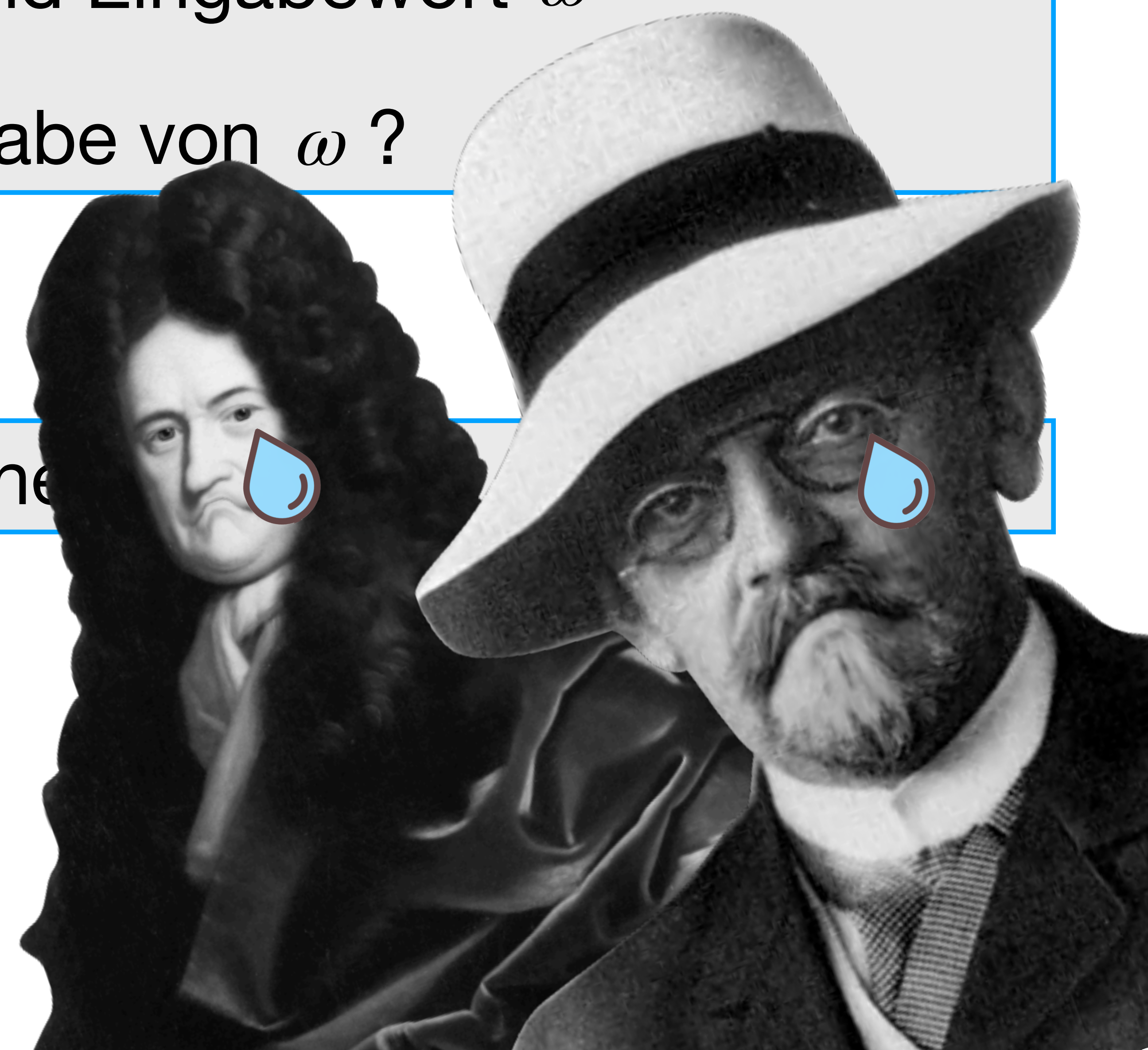
Definition: Allgemeines Halteproblem

Das *allgemeine Halteproblem* lautet wie folgt:

- Gegeben: Turing-Maschine T und Eingabewort ω
- Gefragt: Terminiert T unter Eingabe von ω ?

Satz: Turing, 1936

Das allgemeine Halteproblem ist une

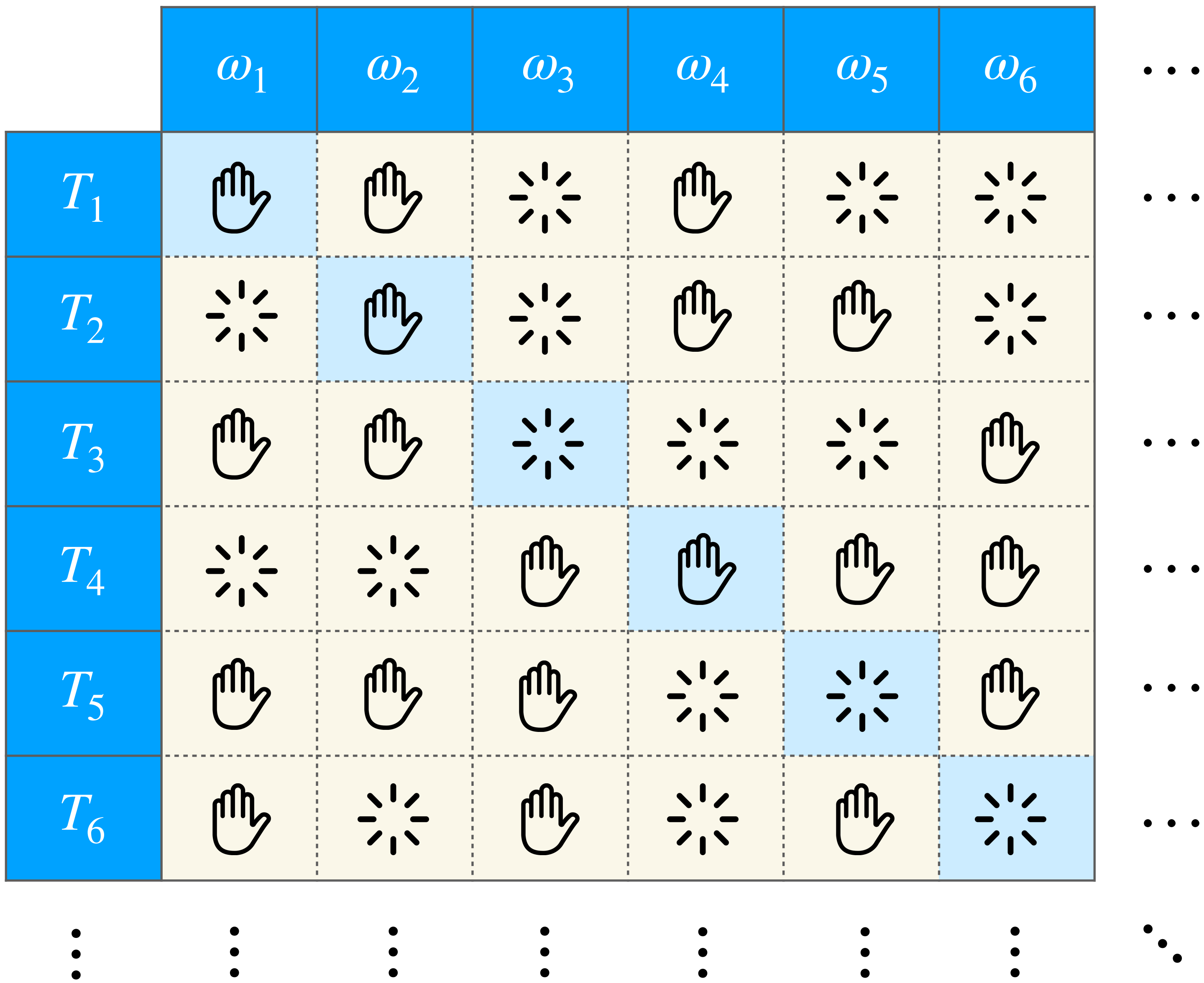


Allgemeines Halteproblem

Unentscheidbare Probleme

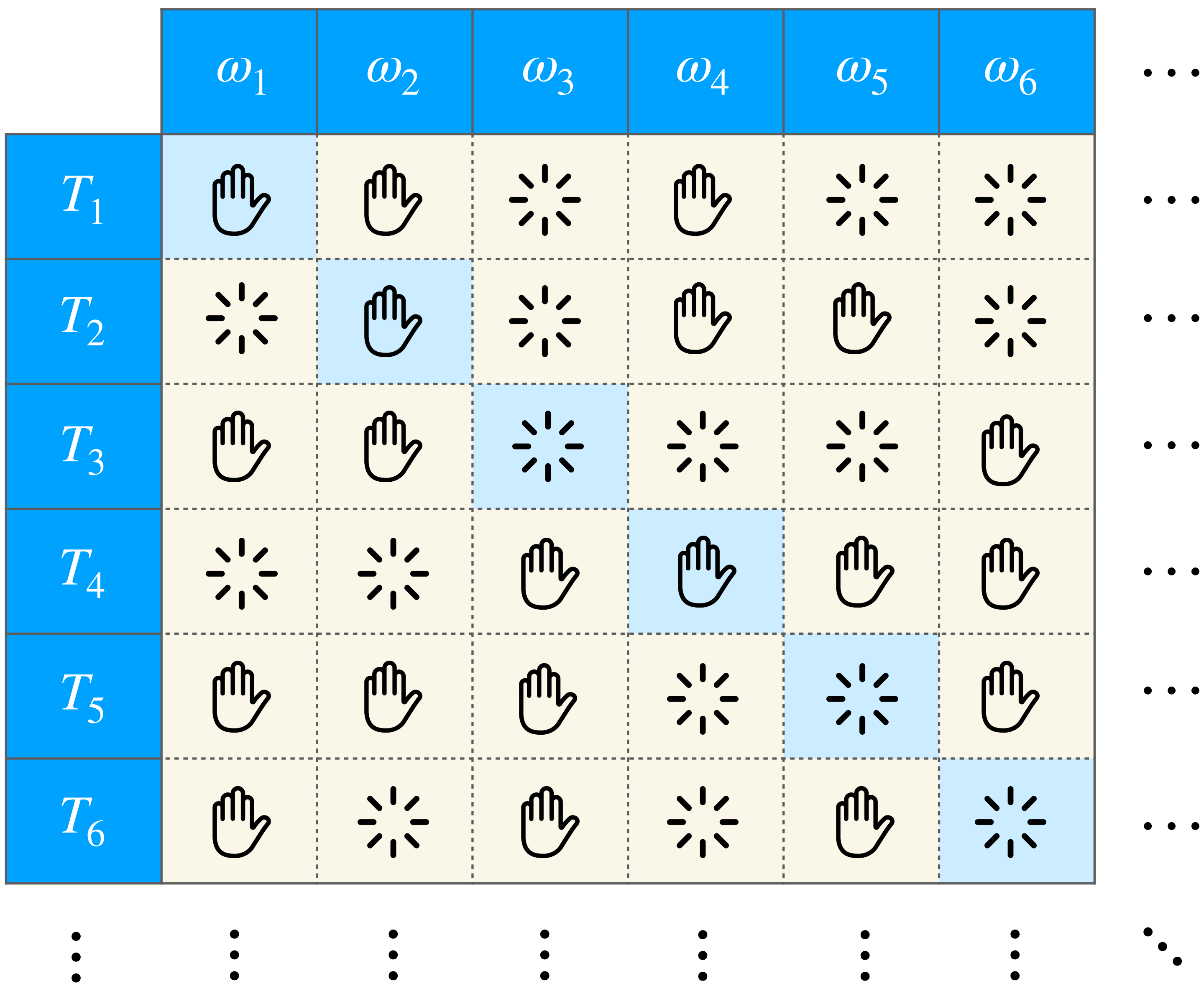
Allgemeines Halteproblem

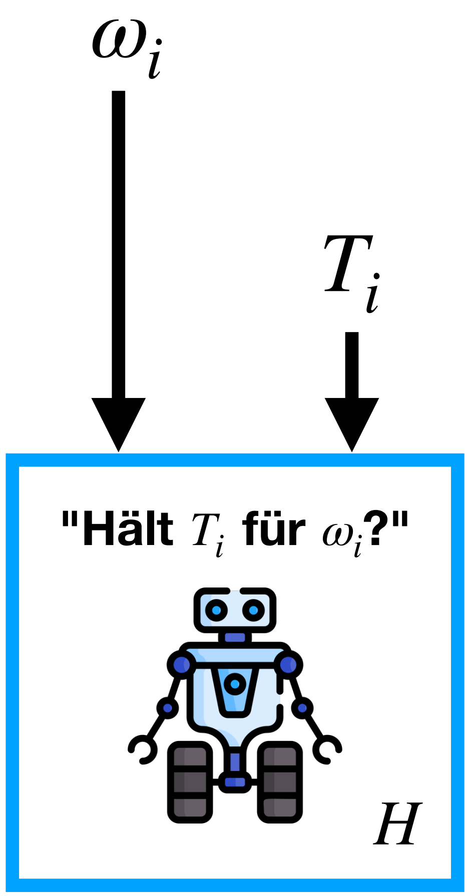
Unentscheidbare Probleme



Allgemeines Halteproblem

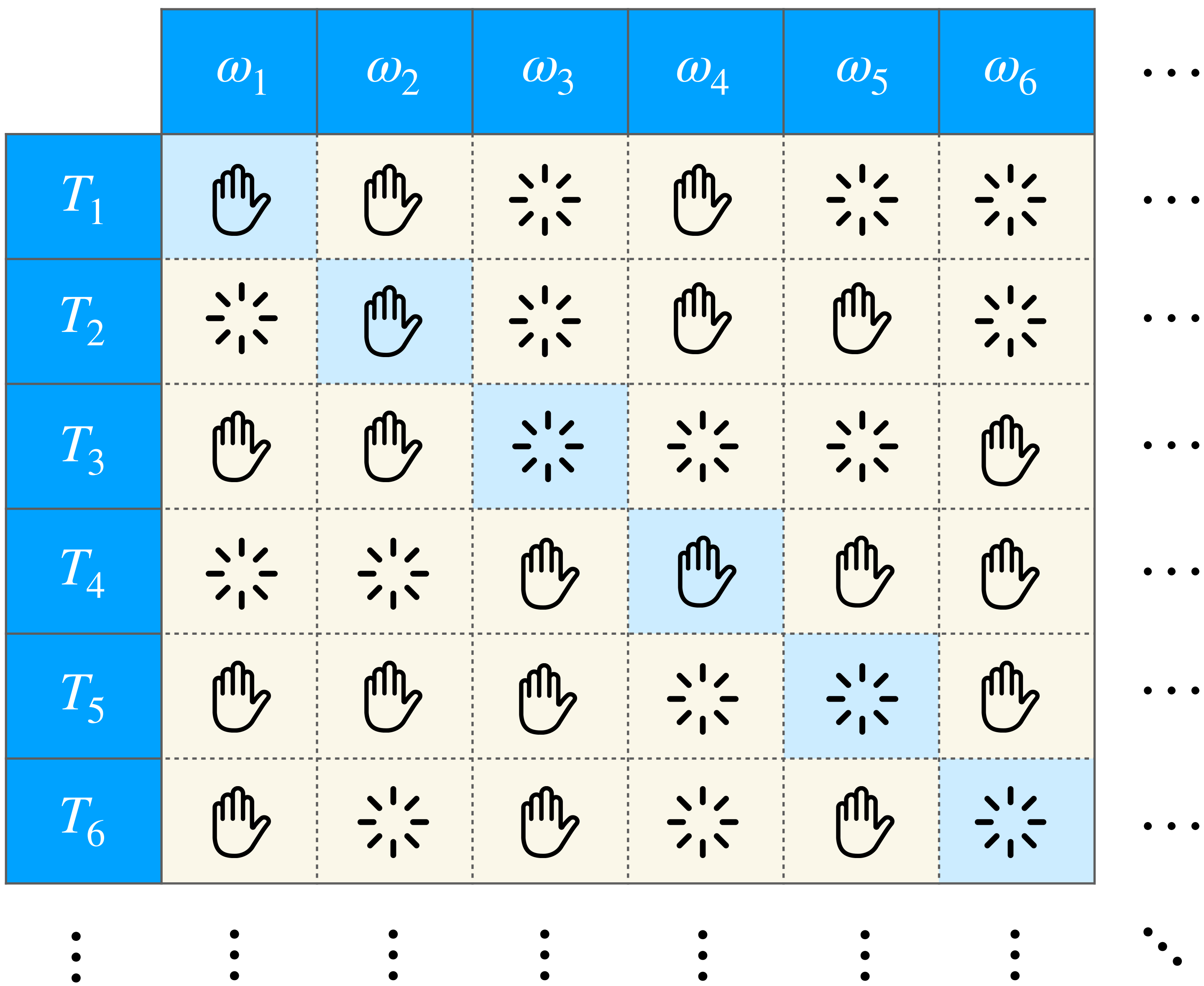
Unentscheidbare Probleme

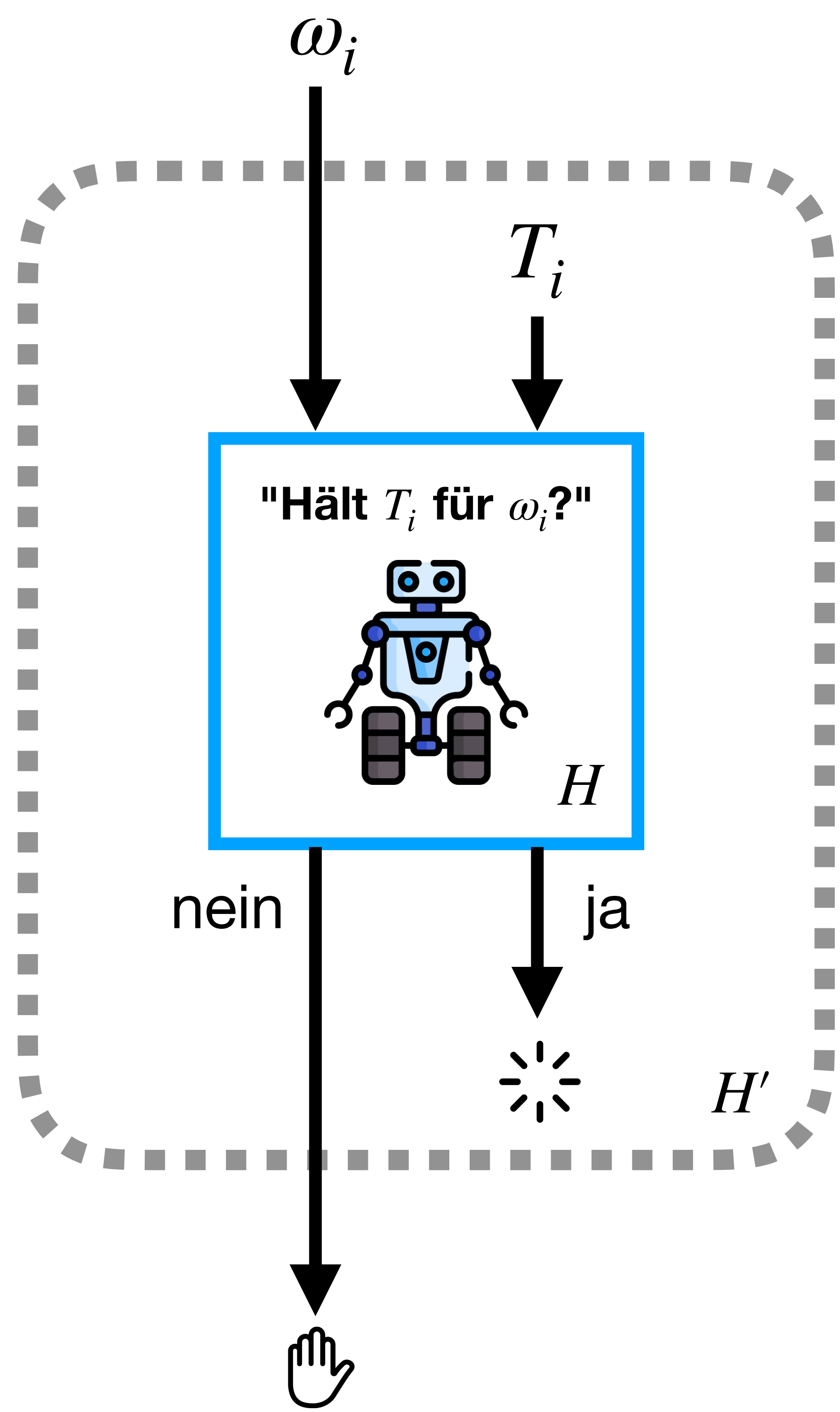




Allgemeines Halteproblem

Unentscheidbare Probleme





Satz von Rice

Satz von Rice

Mit E sei eine nichttriviale funktionale Eigenschaft von Turing-Maschinen gegeben. Dann ist das folgende Problem unentscheidbar:

- Gegeben: Turing-Maschine T
- Gefragt: Besitzt T die Eigenschaft E?

Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme

Satz von Rice

Mit E sei eine nichttriviale funktionale Eigenschaft von Turing-Maschinen gegeben. Dann ist das folgende Problem unentscheidbar:

- Gegeben: Turing-Maschine T
- Gefragt: Besitzt T die Eigenschaft E ?

- Berechnet T eine konstante Funktion?
- Generiert T zweimal das gleiche Zeichen in Folge?
- Berechnen zwei Turing-Maschinen die selbe Funktion?

Satz von Rice

Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E

Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme

Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E

$T_\perp$ erfüllt E

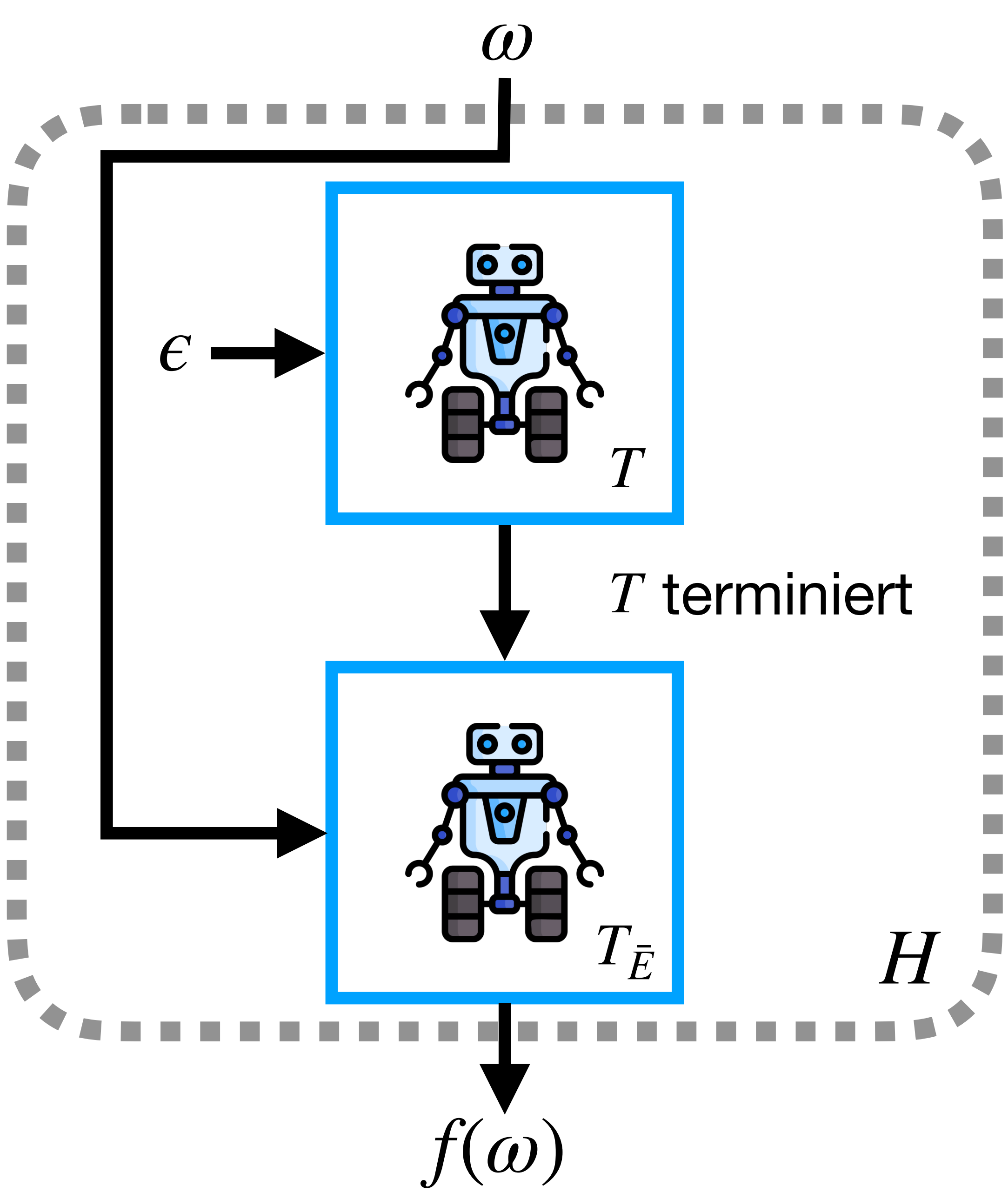
$T_\perp$ erfüllt E nicht

Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme

Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E

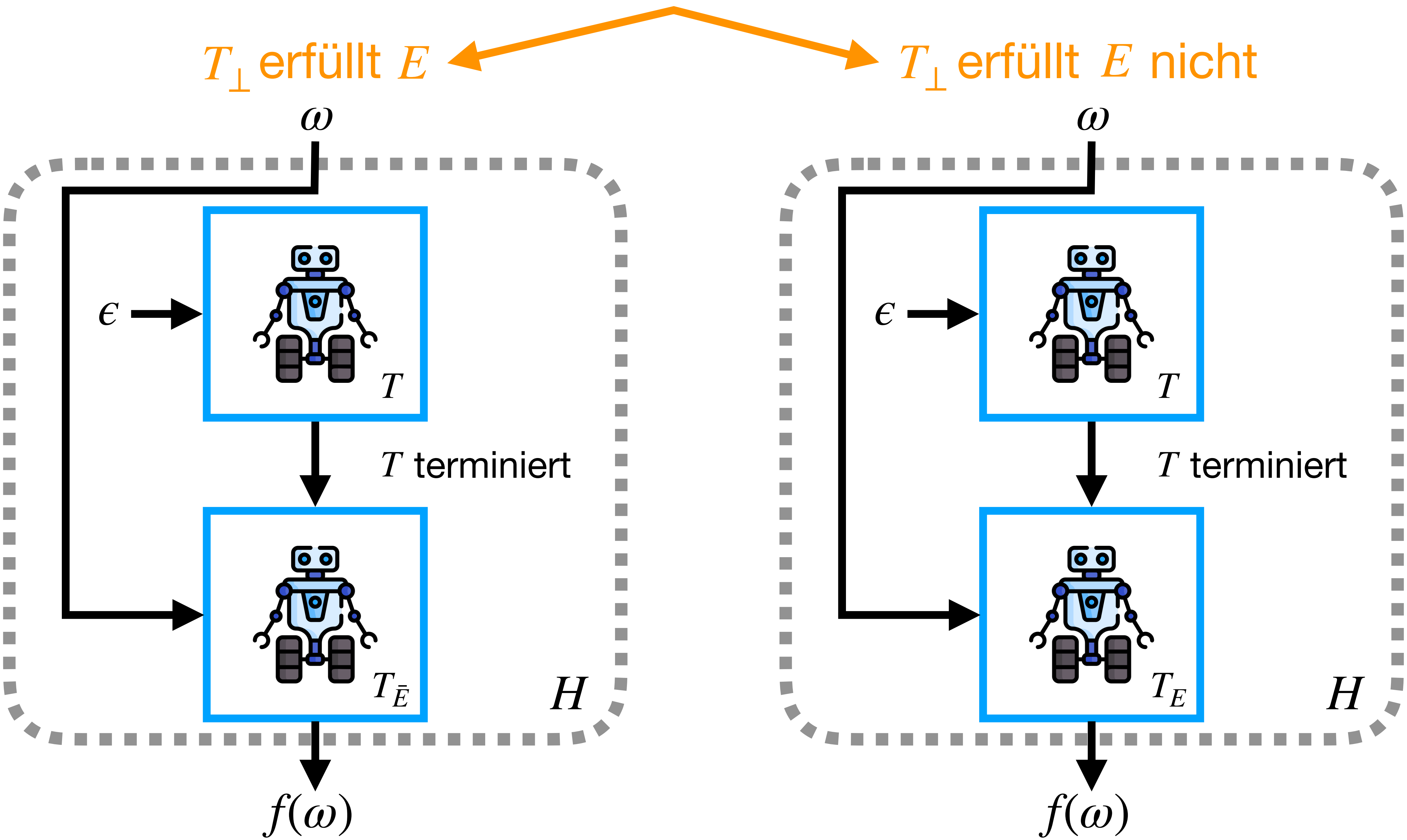
$T_\perp$ erfüllt E | $T_\perp$ erfüllt E nicht



Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme

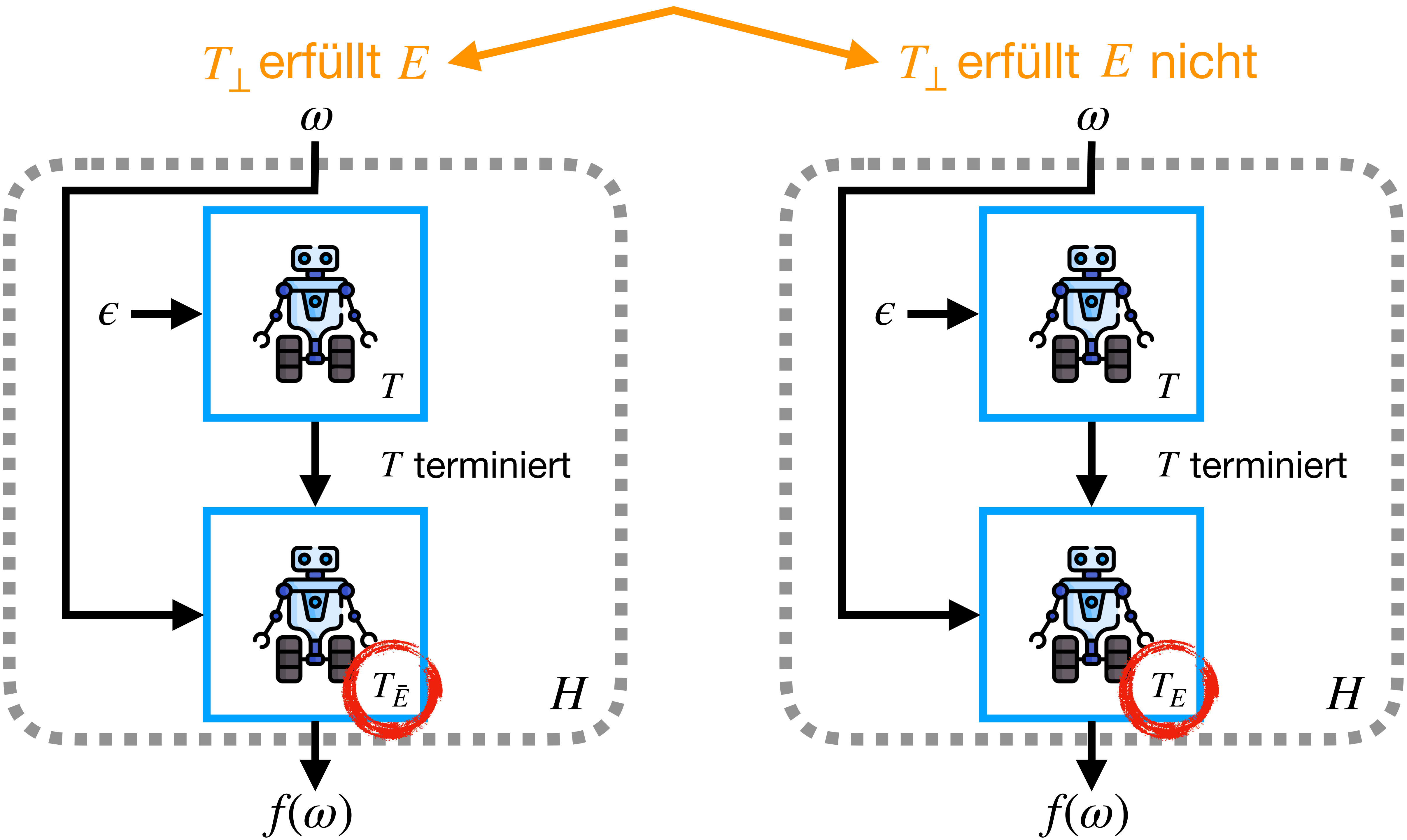
Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E



Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme

Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E

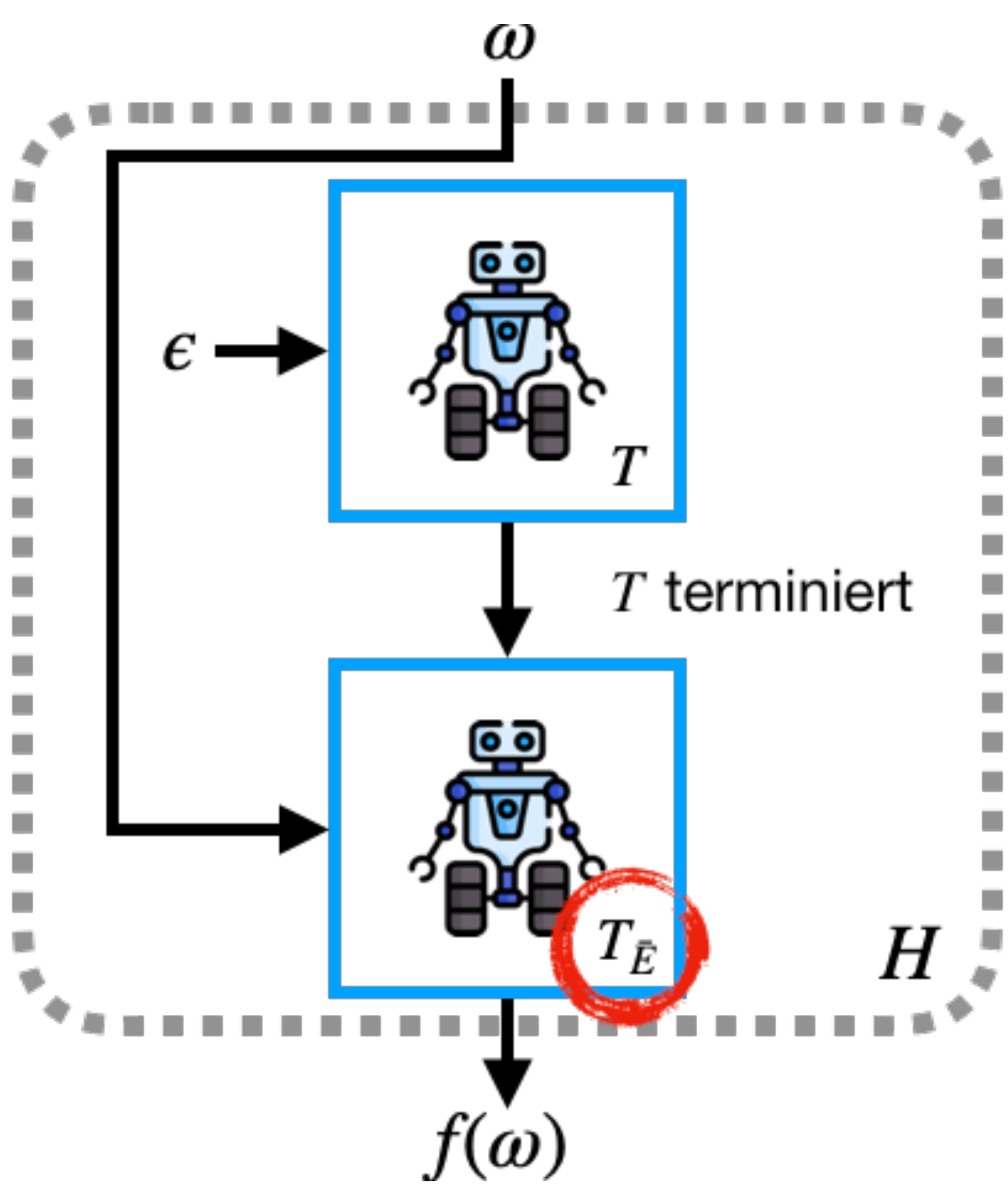


Satz von Rice

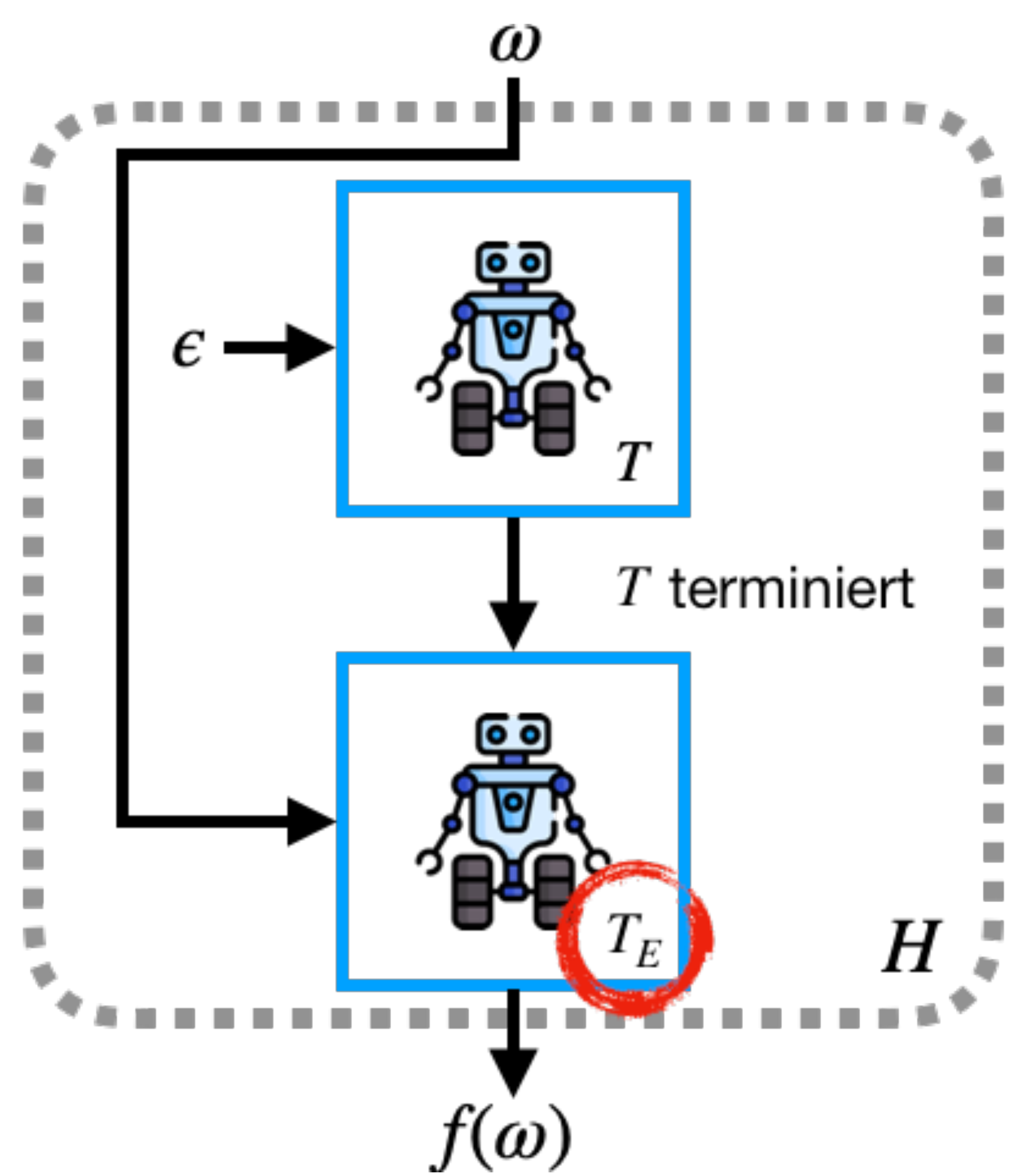
Unentscheidbare Probleme

Gegeben: Turing-Maschine $T_\perp$ und nichttriviale Eigenschaft E

$T_\perp$ erfüllt E

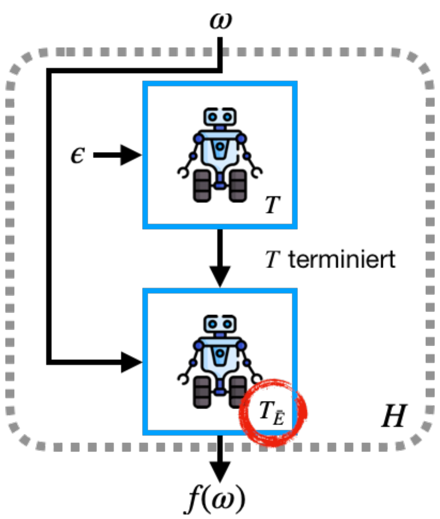


$T_\perp$ erfüllt E nicht

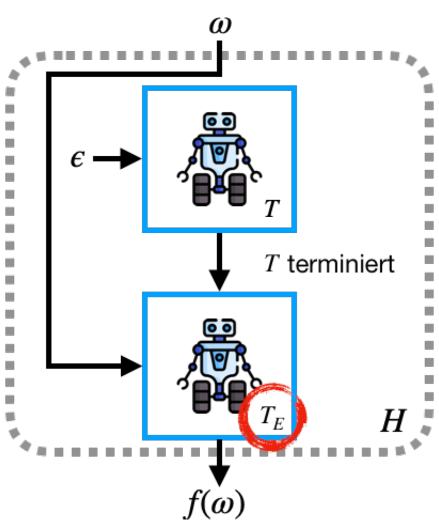


Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme



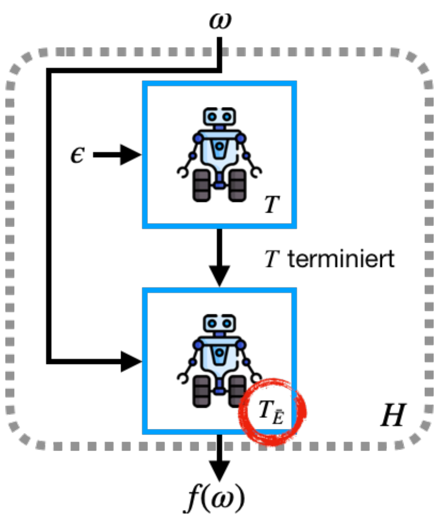
$T_\perp$ erfüllt E



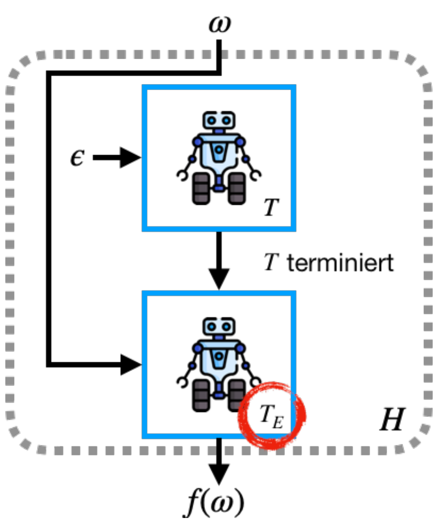
$T_\perp$ erfüllt E nicht

Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme



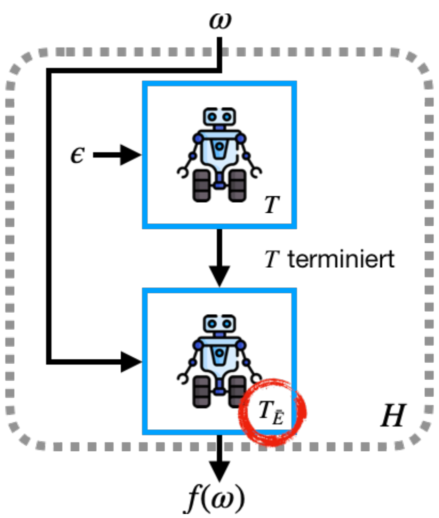
$T_\perp$ erfüllt E



$T_\perp$ erfüllt E nicht

Satz von Rice

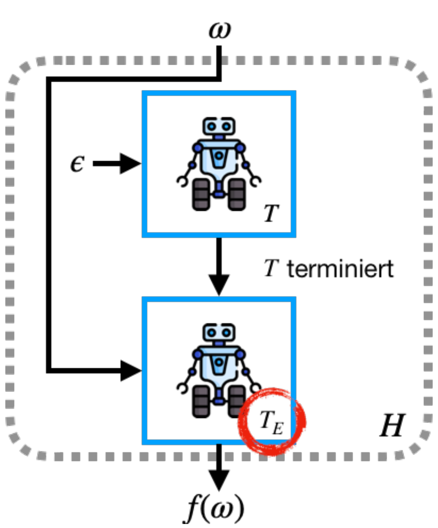
Unentscheidbare Probleme



$T_\perp$ erfüllt E

T **terminiert** $\Rightarrow H \equiv T_{\bar{E}} \Rightarrow H$ **erfüllt** E **nicht**
T **terminiert nicht** $\Rightarrow H \equiv T_\perp \Rightarrow H$ **erfüllt** E

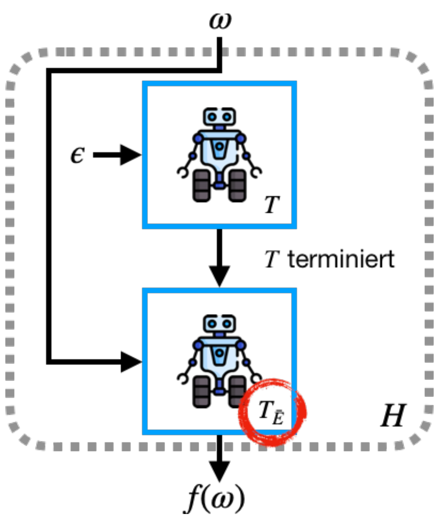
T **terminiert** $\Rightarrow H \equiv T_E \Rightarrow H$ **erfüllt** E
T **terminiert nicht** $\Rightarrow H \equiv T_\perp \Rightarrow H$ **erfüllt** E **nicht**



$T_\perp$ erfüllt E nicht

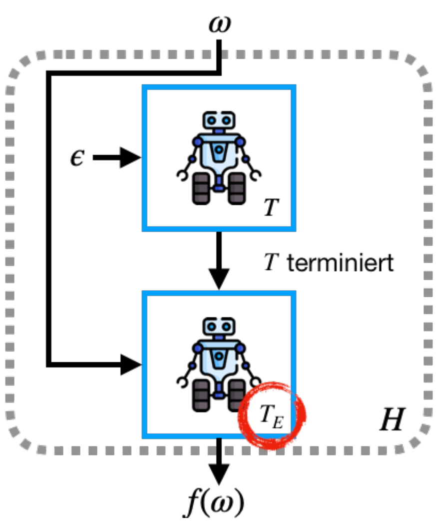
Satz von Rice

Unentscheidbare Probleme



$T_\perp$ erfüllt E

T **terminiert** $\Rightarrow H \equiv T_{\bar{E}} \Rightarrow H$ **erfüllt** E **nicht**
T **terminiert nicht** $\Rightarrow H \equiv T_\perp \Rightarrow H$ **erfüllt** E



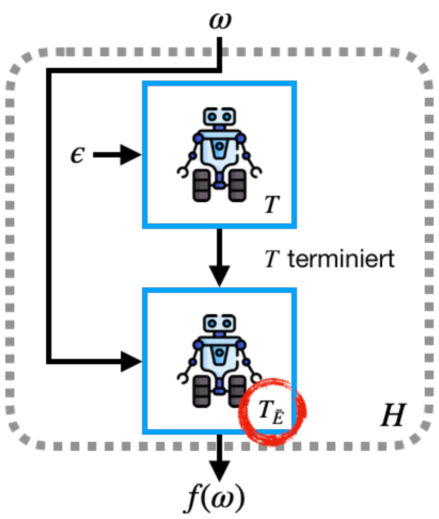
T **terminiert** $\Rightarrow H \equiv T_E \Rightarrow H$ **erfüllt** E
T **terminiert nicht** $\Rightarrow H \equiv T_\perp \Rightarrow H$ **erfüllt** E **nicht**

$T_\perp$ erfüllt E nicht

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz von Rice

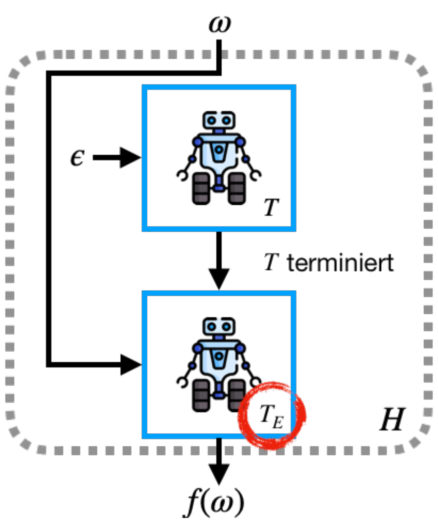
Unentscheidbare Probleme



$T_\perp$ erfüllt E

H **erfüllt** $E \Rightarrow T$ **terminiert nicht**
H **erfüllt** E **nicht** $\Rightarrow T$ **terminiert**

H **erfüllt** E **nicht** $\Rightarrow T$ **terminiert nicht**
H **erfüllt** $E \Rightarrow T$ **terminiert**



$T_\perp$ erfüllt E nicht

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Fazit

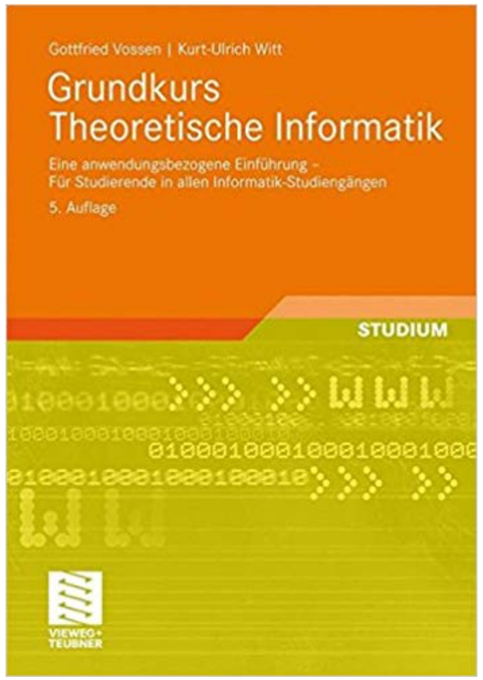
Bildnachweise

Quellen

- https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41ouOaV2egL.jpg
- https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41%2B0mZbRetL._SX348_BO1,204,203,200_.jpg
- https://de.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz#/media/Datei:Christoph_Bernhard_Francke_-_Bildnis_des_Philosophen_Leibniz_(ca._1695).jpg
- https://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert#/media/Datei:Hilbert.jpg
- https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Ackermann_(Mathematiker)#/media/Datei:Ackermann_Wilhelm.jpg
- https://www.tagseoblog.de/images11/alan-turing-foto.jpg
- https://en.wikipedia.org/wiki/Alonzo_Church#/media/File:Alonzo_Church.jpg
- Icon made by Freepick from www.flaticon.com
- Icon made by Cole Bemis from www.flaticon.com

Literatur

Quellen



Hoffmann, Dirk W.:
Theoretische Informatik, 3. Auflage,
München: Hanser 2015

Vossen, Gottfried/Witt, Kurt-Ulrich:
Grundkurs Theoretische Informatik, 5. Auflage,
Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2011

Schöning, Uwe: Theoretische Informatik — kurzgefasst, 4. Auflage,
Heidelberg: Spektrum 2001

Hoffmann, Dirk W.: Grenzen der Mathematik, 3. Auflage,
Berlin: Springer Spektrum 2018