SEMINARVORTRAG SPIELTHEORIE

Julian Stumpe CGT102323 WS2018/2019

GLIEDERUNG

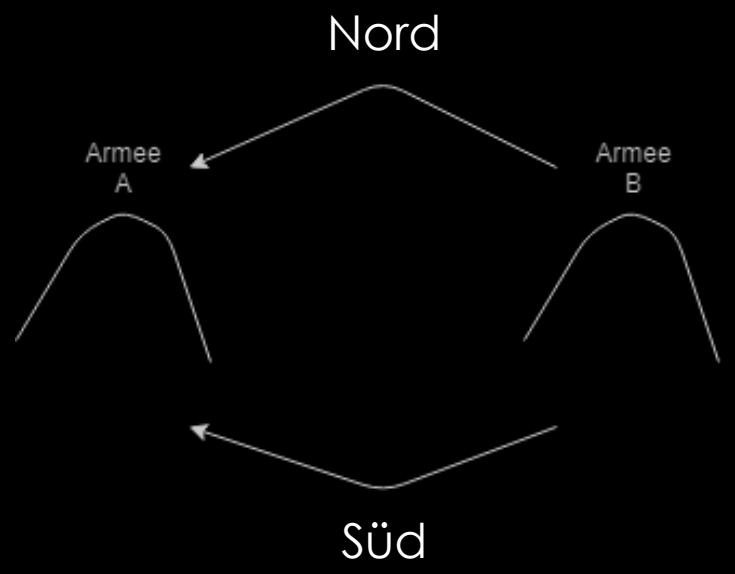
1. Spieltheorie – Eine Einführung
2. Nullsummenspiel
   1. Allgemeines
   2. Von Neumanns MinMax-Satz
   3. Wert des Spiels und Gleichgewichtslage
3. Nullsummenspiel mit mehreren Entscheidungsschritten
   1. „Drei Türen“
4. Verallgemeinerung Nullsummenspiel
   1. Können Egoisten zusammenarbeiten?
   2. Nash-Gleichgewicht
   3. Lösungsversuch Gefangenendilemma
   4. Robert Axelrod Turnier
   5. „Tit for Tat“ im Alltag
5. Abschluss

1. SPIELTHEORIE – EINE EINFÜHRUNG

- Trotz des unkompliziert klingenden Names, ein wichtiger Zweig der Mathematik
- Anwendung in Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften, Informatik
- Keine klassische Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 NULLSUMMENSPIEL - ALLGEMEINES

Beispiel „Die zwei Armeen“



1. A gewinnt, wenn A und B über Norden angreifen
2. A gewinnt, we n angreifen
3. B gewinnt, we iedene Seiten angreif
4. Die Armee die nnt immer über eine ang
5. Unentschieden

	Nord	Süd	bleiben
Nord	+1	-1	-1
Süd	-1	+1	-1
bleiben	+1	+1	0

Auszahlungsmatrix

Wer im Alleingang von der Gleichgewichtslage abweichen will, wird unwiderruflich bestraft!

2.1 NULLSUMMENSPIEL - ALLGEMEINES

Beispiel „ Schere-Stein-Papier“

		Björn		
		Schere	Stein	Papier
	Schere	**0**	**-1**	**+1**
Anna	Stein	**+1**	**0**	**-1**
	Papier	**-1**	**+1**	**0**

Auszahlungsmatrix

Anna Gewinn: 1/3 * 0 + 1/3 * 1 + 1/3 * (-1) = 0

Björn Gewinn: 1/3 * 0 + 1/3 * 1 + 1/3 * (-1) = 0

Erwarteter Gewinn = 0 → Wert des Spiels = 0

2.2 VON NEUMANNS MINMAX SATZ

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	u_{11}	u_{12}	$\dots$	u_{1n}
A_2	u_{21}	u_{22}	$\dots$	u_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	u_{m1}	u_{m1}	$\dots$	u_{mn}

$Wahrscheinlichkeitsvektor\ \vec{p} = (p_1, \dots, pm)$

$Wahrscheinlichkeitsvektor\ \vec{q} = (q_1, \dots, qn)$

$$E[x] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

2.2 VON NEUMANNS MINMAX SATZ

V_m : *Menge aller Wahrscheinlichkeitsvektoren mit m Komponenten für A*

V_n : *Menge aller Wahrscheinlichkeitsvektoren mit n Komponenten für B*

$$E[x] = \min_{q \in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Kleinster Betrag

$$E[x] = \max_{p \in V_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

$$E[x] = \max_{p \in V_m} \min_{q \in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Mindestbetrag

$$E[x] = \min_{q \in V_n} \max_{p \in V_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Sichtweise von A

Sichtweise von B

2.2 VON NEUMANNS MINMAX SATZ

„Für beliebige endliche Nullsummenspiele mit zwei Spielern und der Auszahlungsmatrix U der Dimension (m x n) gilt: “ *(John von Neumann 1928)*

$$\max_{\mathrm{p}\in V_m} \min_{q\in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{\mathrm{i}} q_j u_{ij} \quad = \quad \min_{q\in V_n} \max_{\mathrm{p}\in V_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{\mathrm{i}} q_j u_{ij}$$

Das Paar p und q kann deshalb als Gleichgewichtslage des Spiels bezeichnet werden.

2.3 WERT DES SPIELS UND GLEICHGEWICHTSLAGE

Beispiel „ Der Briefumschlag“

		B (ich)	
		100	200
A (Gegner)	100	**-50**	**200**
	200	**-100**	**100**

$$a \geq b \geq c \geq d$$

1. a und b liegen in einer Zeile
   → Wert des Spiels ist b

2. a und b liegen in einer Spalte
   → Wert des Spiels ist c

3. a und b liegen in einer Diagonale
   → kompliziert

2.3 WERT DES SPIELS UND GLEICHGEWICHTSLAGE

B

A

100	**-150**
-150	**200**

$$\frac{a-c}{(b-d)+(a-c)}$$

$$\frac{b-d}{(b-d)+(a-c)}$$

$$\frac{a-d}{(b-c)+(a-d)} \quad \frac{b-c}{(b-c)+(a-d)}$$

3.1 a und c liegen in einer Zeile:

Verlust B Spalte 1: $p\,c + (1-p)\,b$

Verlust B Spalte 2: $p\,a + (1-p)\,d$

$$\rightarrow \quad p\,a + (1-p)\,d = p\,c + (1-p)\,b \qquad p = \frac{b-d}{(b-d)+(a-c)}$$

2.3 WERT DES SPIELS UND GLEICHGEWICHTSLAGE

		B (ich)	
		100	200
A (Gegner)	100	**100**	**-150**
	200	**-150**	**200**
		$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

3.1 Wenn a und c in einer Zeile liegen :

$$\frac{a(b-d)+d(a-c)}{(b-d)+(a-c)}$$

3.2 Wenn a und d in einer Zeile liegen :

$$\frac{a(b-c)+c(a-d)}{(b-c)+(a-d)}$$

Erwarteter Gewinn : $E[x] = \frac{a(b-d)+d(a-c)}{(b-d)+(a-c)} = \frac{200*250-150*350}{250+350} = -\frac{25}{6} \approx -4{,}17€$

3.1 „DREI TÜREN“

Moderator M

Teilnehmer T	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)
1bb	1	1	0	0	0	0
1bw	1	0	1	1	0	0
1wb	0	1	0	0	1	1
1ww	0	0	1	1	1	1
b2b	0	0	1	1	0	0
b2w	1	1	1	0	0	0
w2b	0	0	0	1	1	1
w2w	1	1	0	0	1	1
bb3	0	0	0	0	1	1
bw3	1	1	0	0	1	0
wb3	0	0	1	1	0	1
ww3	1	1	1	1	0	0

Moderator:

Teilnehmer:

w = wechseln ; b = bleiben

w2b;w2w;bb3;bw3;wb3;ww3

Strategie M: $\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

- Auto auf gut Glück verstecken
- Tür auf gut Glück auswählen

Strategie T:

- Anfangstür zufällig auswählen
- Bei Wahl immer wechseln

Erwarteter Gewinn:
Mittelwert der Zeilen = $4/6 = \frac{2}{3}$

→ Gleichgewichtslage der Strategien

4.1 KÖNNEN EGOISTEN ZUSAMMENARBEITEN?

		B	
		L	R
A	L	(-1,-1)	(-100,-100)
	R	(-100,-100)	(+1,+1)

- Nullsummenspiel(3,-3)
- Logische Strategie wäre R
- Existenz eines gewissen Risikos, dass Mitspieler Situation nicht versteht
- Keine Sicherheit da keine Absprache

4.1 KÖNNEN EGOISTEN ZUSAMMENARBEITEN?

„Gefangenen-Dilemma“

		Björn	
		Z	V
Anna	Z	**(3,3)**	**(-2,4)**
	V	**(4,-2)**	**(0,0)**

- Wenn Björn Z spielt ist Annas Gewinn 3 oder 5
- → Mehr Gewinn, wenn sie V spielt
- Wenn Björn V spielt ist Annas Gewinn 0 oder 1
- → Mehr Gewinn, wenn sie V spielt

→ V dominiert Z

4.2 NASH-GLEICHGEWICHT

		B	
		L	R
A	L	**(-1,-1)**	**(-100,-100)**
	R	**(-100,-100)**	**(+1,+1)**

- Wichtigstes mathematisches Ergebnis der endlichen Nicht-Nullsummenspiele
- 1950 vom Amerikaner John Nash bewiesen
- Paar evtl. gemischter Strategien p und q, ohne Anreiz abzuweichen
- <u>Mindestens</u> ein Paar

4.3 LÖSUNGSVERSUCH GEFANGENENDILEMMA

- Einfach! Beide Spieler handeln uneigennützig → Problem gelöst
- Problem: Spieler sind biologische Wesen → wissen, dass Uneigennützige benachteiligt werden
- Wiederholtes Spielen des Gefangenendilemmas
- → lukrative Zusammenarbeit ist für jeden besser
- Beim Verrat verliert man langfristige Glaubwürdigkeit

4.4 ROBERT AXELROD TURNIER

- 1970er Jahren veranstaltet
- Verschiedene Computerprogramme spielen WGD
- Turnier I Gewinner: „Tit For Tat“
- Analyse ergab bessere Strategien
- Turnier II mit 63 Teilnehmern und modifizierten Regeln: Gewinner „Tit For Tat“

1. freundlich 2. verzeihend 3. leicht zu provozieren 4.vorhersehbar

4.5 „TIT FOR TAT“ IM ALLTAG

- Schnell erkennbar → Mitmenschen vertrauen auf Zusammenarbeit
- ↯ Problem: Missbrauch
- Gewisses Maß an Misstrauen notwendig
- These: Menschen tun das, was ihre Mitmenschen auch tun
- Übertragungsfehler führen zum Teufelskreis
- → Zusätzlich Kommunikation notwendig

Optimal: allgemeine „Tit For Tat“-Haltung mit zusätzlicher Kommunikation

5. ABSCHLUSS

- Spieltheoretische Analysen basieren auf der rationalistischen Annahme:
- → maximaler Eigennutz
- Vermeintlich uneigennützige Entscheidungen auf Eigennutz zurückführen
- Diese Reduktion ist sehr kontrovers

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT