Seminarvortrag Spieltheorie

Julian Stumpe CGT102323, WS18/19

Ausarbeitung des Seminarvortrags zum Thema Spieltheorie vom 13.11.2018 im Rahmen der Seminarvorträge von Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Seminarvortrag Spieltheorie

Julian Stumpe CGT102323, WS18/19

Inhaltsverzeichnis

1. Spieltheorie – Eine Einführung 2
2. Nullsummenspiel 3
2.1 Allgemeines 3
2.2 Von-Neumann MinMax Satz 6
2.3 Wert eines Spiels und die Gleichgewichtslage 8
3. Nullsummenspiel mit mehreren Entscheidungsschritten 11
3.1 „Die drei Türen“ 11
4. Verallgemeinerung Nullsummenspiel 13
4.1 Können Egoisten zusammenarbeiten? 13
4.3 Lösungsversuch Gefangenendilemma 15
4.4 Robert Axelrod Turnier 16
4.5 “Tit or Tat” im Alltag 18
5. Abschluss 19

1. Spieltheorie – Eine Einführung

Fällt der Begriff Spieltheorie, verbindet man diesen auf Anhieb mit der Assoziation an Glücks- und Gesellschaftsspiele, ebenso wie mit Kasinos.
Die Bevölkerung verbindet mit diesen Begriff eine sichere Strategie zum garantierten Gewinn.
Diese Vorstellung ist zwar schön und kann das Image der Spieltheorie vom Hören Sagen aufwerten, jedoch wird diese Vorstellung der Spieltheorie nicht im Ansatz gerecht.
In der folgenden Ausarbeitung möchte ich einen detaillierten Überblick über diverse Teilbereiche der Spieltheorie geben, der als Zusatz und Zusammenfassung zum Seminarvortrag vom 13.11. dient.
Sowohl der Seminarvortrag, als auch diese Seminararbeit basieren auf dem dritten Kapitel des Buches von Olle Häggström: *„Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie“*.
Im Gegensatz zum eben genannten Image der Spieltheorie, ist diese ein sehr wichtiger Zweig der Mathematik.
Sie findet Anwendung in Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften, sowie in der Informatik.
Häufig wird die Spieltheorie fälschlicherweise der Wahrscheinlichkeitstheorie zugeordnet, weil diese ein bedeutender Teil in der Spieltheorie ist. Jedoch ist sie nur ein Mittel zum Zweck, um die eigene Spielweise vor dem Gegenspieler unvorhersehbar zu machen.
Als ersten großen Punkt möchte ich mich mit dem endlichen Nullsummenspiel zweier Personen befassen. Diese Kategorie umfasst genau jene Gesellschafts- und Glücksspiele, an welche man als erstes bei dem Begriff „Spieltheorie“ denkt.
Im weiteren Verlauf der Arbeit sehen wir jedoch, dass diese Klasse nur einen sehr geringen Teil der Spieltheorie ausmacht, gleichwohl es ein sehr wichtiger ist.

2. Nullsummenspiel

2.1 Allgemeines

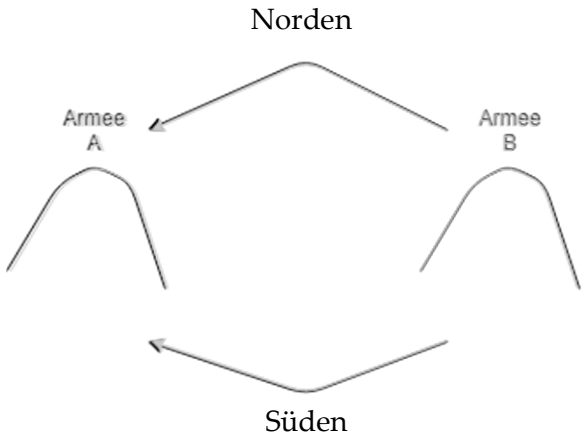
Um das endliche Nullsummenspiel zweier Personen zu verstehen, bedienen wir uns einem Beispiel. In diesem Beispiel stehen sich zwei Armeen gegenüber. Diese haben entweder die Möglichkeit auf dem Berg zu warten, über Norden anzugreifen oder über Süden anzugreifen. Für jede Strategie der beiden Armeen ist ein fester Ausgang der Situation definiert.

1. A gewinnt, wenn A und B über Norden angreifen
2. A gewinnt, wenn A und B über Süden angreifen
3. B gewinnt, wenn A und B über verschiedene Seiten angreifen
4. Die Armee die auf dem Berg ist gewinnt immer über eine angreifende Armee
5. Unentschieden wenn beide warten

Diese Definitionen werden in der Spieltheorie in einer sogenannten Auszahlungsmatrix veranschaulicht. Dabei ist die Auszahlungen immer aus Sicht des Spielers A zu interpretieren.

		B		
		Nord	Süd	bleiben
A	Nord	+1	-1	-1
	Süd	-1	+1	-1
	bleiben	+1	+1	0

Auszahlungsmatrix



Mit dem Blick auf die Auszahlungsmatrix weiß man, welche Auswirkungen die einzelnen Strategien haben, jedoch stellt sich die Frage, für welche Strategie sich die Spieler am besten entscheiden sollten. In der Spieltheorie gibt es eine wichtige Grundannahme: „Jeder Spieler ist absolut rational“.
Die rationalistische Annahme besagt, dass jeder Spieler nur seinen eigenen Gewinn maximieren will. Auf dieser Basis kann man nun die Auswahl der Strategien von Spieler A und B analysieren.
Spieler A wählt eine Zeile der Matrix und Spieler B eine Spalte. Diese Auswahl erfolgt zeitgleich und ohne Kenntnis des Gegners. Um einen Sieg besser werten zu können, definiert man, dass der Sieger 1€ vom Verlierer bekommt.

Dabei fällt nun auf, dass der Gewinn des Siegers gleich der Verlust des Verlierers ist.
Dieses Gleichgewicht ist der Grund des Namens der Nullsummenspiele. Die Gesamtsumme von Gewinn plus Verlust ist nämlich 0.
Aus Sicht von Spieler A macht nun die gelbe Zeile am meisten Sinn, da sie mindestens ein Unentschieden garantiert.
Aus Sicht von Spieler B ist die rote Spalte am sinnvollsten, da diese ihm ebenso mindestens ein Unentschieden garantiert.
Auf Basis der rationalistischen Annahme werden sich beide Spieler für die Strategie bleiben entscheiden.
An diesem Punkt existiert nun eine Gleichgewichtslage. Eine Gleichgewichtslage ist in der Spieltheorie so definiert, dass es für keinen der Spieler einen Anreiz gibt alleine von der Strategie abzuweichen.
Im diesem Beispiel würde das einseitige Abweichen von der Gleichgewichtslage zum Verlieren führen.
Neben der Gleichgewichtslage gibt es in der Spieltheorie noch den Wert des Spiels.
Der Wert des Spiels drückt das zu erwartende Ergebnis eines Spiels aus.
Im aktuellen Beispiel wäre der Wert des Spiels 0.

Da dieses Beispiel sehr eindeutig in der Entscheidung ist, analysieren wir im Folgenden das Spiel „Schere-Stein-Papier“.

		B		
		Schere	Stein	Papier
	Schere	0	-1	+1
A	Stein	+1	0	-1
	Papier	-1	+1	0

In diesem Spiel haben beide Spieler die potentielle Chance zu verlieren, egal welche Strategie sie wählen.
Auch in diesem Spiel gibt es eine Gleichgewichtslage und einen Wert des Spiels.
Voraussetzung dafür ist, dass die Spieler eine gemischte Strategie anwenden.
An dieser Stelle wird nun die Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt.
Spieler A randomisiert die Spielzüge und spielt jeden Zug mit der Wahrscheinlichkeit 1/3.
Angenommen Spieler B würde immer Schere spielen, wäre der Erwartungswert für den Gewinn von A: 1/3*0 + 1/3 *+1+ 1/3 *-1 = 0. Für Spieler B wäre der Gewinn: 1/3*0 + 1/3 *-1+ 1/3 * 1 = 0.

Sollte Spieler B anstelle von Schere nun beispielsweise Stein spielen, wären die erwarteten Gewinne beider Spieler ebenfalls 0. Das Gleiche gilt für Papier.
Um seine Spielzüge für A unvorhersehbar zu halten, randomisiert Spieler B ebenfalls mit 1/3.
Somit sichert sich Spieler B genau wie Spieler A einen erwarteten Gewinn von 0.
Bei mehreren Durchläufen kann sich keiner der Spieler vor einem Einzelverlust in einer Runde schützen, jedoch wird im Endeffekt jeder Spieler einen Gewinn von 0 haben.
Damit ist auch der Wert des Spiel bestimmt: dieser beträgt wie im vorherigen Beispiel 0.
Außerdem haben wir eine Gleichgewichtslage bestimmt, da kein Spieler durch einseitiges Abweichen der Strategie einen besseren erwarteten Gewinn erhalten kann.

2.2 Von-Neumann MinMax Satz

Alle endlichen Nullsummenspiele zweier Personen lassen sich in der Auszahlungsmatrix U verallgemeinern.
Die Auszahlungsmatrix U hat dabei die Dimensionen m x n mit m möglichen Spielweisen für A und n möglichen Spielweisen für B. Die Matrix hat dabei die Elemente ui,j mit i = 1…m, j=1,…,n.

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	u_{11}	u_{12}	…	u_{1n}
A_2	u_{21}	u_{22}	…	u_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_n	u_{m1}	u_{m1}	…	u_{mn}

Spieler A würde einen von m möglichen Zügen auswählen und B einen von n möglichen.
Damit wird Strategie Ai und Bj gewählt und der Wert ui,j müsste von Spieler B an Spieler A gezahlt werden. Dabei kann der Wert auch negativ sein.
Gemischte Strategien werden hierbei mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsvektoren $\vec{p} = (p_1, \dots, pm)$ für A und $\vec{q} = (q_1, \dots, qn)$ für B dargestellt.
Die Auszahlung ist als eine Zufallsgröße X definiert, die den Erwartungswert $E[x]$ hat.

$$E[x] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Dabei werden alle Elemente der Auszahlungsmatrix mit den Elementen der Wahrscheinlichkeitsvektoren gewichtet und aufsummiert.
Die angewandte Strategie kann aus der Menge Vm oder Vn ausgewählt werden, die alle Wahrscheinlichkeitsvektoren mit m oder n Komponenten beinhalten.

Aus der Sicht von Spieler A muss damit gerechnet werden, dass Spieler B seine Strategie q so wählt, dass der Erwartungswert der Auszahlung so klein wie möglich ist.

$$E[x] = \min_{q \in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Dieser Erwartungswert ist die minimal zu erwartende Auszahlung des Spiels.
Spieler A wird dann seine Strategie p logischerweise so wählen, dass dieser minimal zu erwartende Wert so groß wie möglich ist.

$$E[x] = \max_{p \in V_m} \min_{q \in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Dieser Betrag wäre der Mindestbetrag der Auszählung des Spiels und damit der niedrigste zu erwartende Wert.
Aus Sicht von Spieler B wäre dies genau umgekehrt.
Es muss damit gerechnet werden, dass Spieler A seine Strategie p so wählt, dass der Erwartungswert maximal groß ist und Spieler B würde die Strategie q so wählen, um diesen Betrag so klein wie möglich zu halten.

$$E[x] = \min_{q \in V_n} \max_{p \in V_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Dieser Betrag wäre der höchste zu erwartende Wert der Auszahlung.
1928 wurde von dem Amerikaner John von Neumann bewiesen, dass genau diese beiden Ausdrücke für den höchsten und niedrigsten zu erwartenden Wert gleich sind.
„Für beliebige endliche Nullsummenspiele mit zwei Spielern und der Auszahlungsmatrix U der Dimension (m x n) gilt: " (John von Neumann 1928)

$$\max_{p \in V_m} \min_{q \in V_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij} \quad = \quad \min_{q \in V_n} \max_{p \in V_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u_{ij}$$

Aus dem MinMax-Satz folgt, dass ein Abweichen von den Strategien p und q keinen Vorteil bringt, weshalb p und q auch als Gleichgewichtslage bezeichnet werden können.
Der Satz beinhaltet jedoch nicht nur die Gleichgewichtslage, sondern auch den Wert des Spiels.

Jede Seite ergibt ausgerechnet den Wert des Spiels, da sie für beide Spieler den maximalen Gewinn bietet.

2.3 Wert eines Spiels und die Gleichgewichtslage

Mit dem Von-Neumann Satz gibt es nun einen Ausdruck für den Wert des Spiels, aus dem gleichzeitig die Gleichgewichtslage abgelesen werden kann.
Jedoch benötigt man für die Berechnung des Wertes des Spiels aus dem Von-Neumann Satz die Strategien p und q, welche auch für die Gleichgewichtslage benötigt werden. Ohne p und q ist eine Berechnung nicht möglich.
Wie kann man nun diese Wahrscheinlichkeiten berechnen?
Glücklicherweise gibt es für 2x2 Matrizen ein einfaches Rezept.

In diesem Beispiel möchte ich (Spieler B) in der Uni Glücksspiel veranstalten. Dieses Glücksspiel sollte so verlockend aussehen, dass jemand auf das Spiel eingeht, dies jedoch zu meinem Vorteil ausgeht.
In einen Umschlag wird ein Zettel gesteckt, auf dem entweder 100€ oder 200€ von mir geschrieben wurde. Der Mitspieler (Spieler A) muss nun raten, welcher Betrag auf dem Zettel steht. Sollte er richtig liegen, erhält er den Betrag ausgezahlt. Bei einer falschen Antwort muss er mir 150€ bezahlen.
Aus dem Von-Neumann Satz folg dabei, dass das Spiel einen wohldefinierten Wert besitzt.
Sollte mein Mitspieler wie in der Spieltheorie angenommen rational sein, würde er nur auf das Spiel eingehen, wenn eben dieser Wert größer gleich 0 wäre und dann die gemischte Strategie p anwenden, um diesen Wert zu maximieren.
Um nun das Rezept anwenden zu können, muss die Auszahlungsmatrix die Elemente $a \geq b \geq c \geq d$ haben.
Dabei können drei verschiedene Szenarien auftreten:

1. a und b liegen in einer Zeile

   → Wert des Spiels ist b

200	100
-50	-100

In diesem Fall wählt A die obere Zeile, da der durchschnittliche Gewinn größer ist.
B würde die hintere Spalte wählen, da der durchschnittliche Gewinn niedriger wäre (Auszahlung aus Sicht von A).

2. a und b liegen in einer Spalte

   → Wert des Spiels ist c

-50	200
-100	100

Hier würde Spieler A die obere Zeile wählen, da der durchschnittliche Gewinn größer ist.
B würde die vordere Spalte wählen, da der durchschnittliche Gewinn geringer ist.

3. a und b liegen in einer Diagonale

100	-150
-150	200

Dieser Fall ist leider nicht so einfach zu analysieren, wie 1 und 2.
In diesem Fall müssen beide Spieler eine gemischte Strategie anwenden.
Die Randomisierung wird so gewählt, dass Spieler B, also ich, die vordere Spalte mit den Elementen b,c mit einer solchen Wahrscheinlichkeit p wählt, dass die Wahl der Zeile von A keinen Einfluss auf den erwarteten Wert des Spiels hat.
So kann Spieler B mit seiner Entscheidung den erwarteten Wert allein steuern.
Die Formel zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit wird mit Hilfe der Verluste von Spieler A in den beiden Zeilen hergeleitet.
Sollte sich Spieler A für die obere Zeile entscheiden, würde sein Verlust $p\,b + (1-p)\,d$ sein.
In der zweiten Zeile wäre der Verlust $p\,c + (1-p)\,a$.
Setzt man nun die Verluste der beiden Zeilen gleich und stellt dies nach p um, erhält man die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl der ersten Spalte von B $p = \frac{a-d}{(b-c)+(a-d)}$.
Nach diesem Schema kann man auch die Auswahlwahrscheinlichkeit für die zweite Spalte berechnen $p = \frac{b-c}{(b-c)+(a-d)}$.
Auf die selbe Weise wie die Wahrscheinlichkeiten aus Sicht von B hergeleitet wurden, können auch die aus Sicht von A hergeleitet werden.
Mathematisch überprüft, gibt es keine anderen Wahrscheinlichkeiten, die einen besseren Wert des Spiels für A oder B ergeben.

Spieler B

Spieler A

100	-150	$\frac{7}{12}$	$\frac{a-c}{(b-d)+(a-c)}$
-150	200	$\frac{5}{12}$	$\frac{b-d}{(b-d)+(a-c)}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$		
$\frac{a-d}{(b-c)+(a-d)}$	$\frac{b-c}{(b-c)+(a-d)}$		

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man durch Einsetzen in den von Neumannsatz die Formel für den Wert des Spiels aufstellen. Setzt man nun konkrete Werte ein, erhält man den erwarteten Gewinn:

$$E[x] = \frac{a(b-d)+d(a-c)}{(b-d)+(a-c)} = \frac{200*250-150*350}{250+350} = -\frac{25}{6} \approx -4{,}17€$$

Mit diesem erwarteten Gewinn würde Spieler B, also ich, mit dem Glückssiel Gewinn machen.
Dieser Erwartungswert ist immer gleich, solange ich mich an meine MinMax Strategie halte, unabhängig von der Spielweise von Spieler A, da auf dieser Basis die Strategie gewählt wurde.
Sollte der Fall eintreten, dass nicht a und c in einer Zeile liegen, sondern a und d, müsste in der Formel lediglich c mit d vertauscht werden.
Dieses Schema ist auch auf 3x2 und 3x3 Matrizen anwendbar.

3. *Nullsummenspiel mit mehreren Entscheidungsschritten*

3.1 „Die drei Türen“

Die vorherigen Beispiele könnten den Eindruck erweckt haben, dass die Klasse der endlichen Nullsummenspiele zweier Personen sehr begrenzt ist, jedoch ist dem nicht so.
Viele Spiele können nämlich auf diese Theorie heruntergebrochen werden.
Im folgenden Beispiel wird das Gameshow-Spiel „Die drei Türen“ auf diese Theorie gemünzt.
In diesem Spiel muss ein Kandidat eine von drei Türen aussuchen, hinter den zwei Schafe und ein Auto versteckt sind. Diese wurden zuvor vom Moderator versteckt.
Nachdem der Teilnehmer sich für eine der Türen entschieden hat, öffnet der Moderator eine Tür, welche weder vom Teilnehmer ausgewählt wurde, noch hinter der sich das Auto befindet.
Je nachdem hinter welcher Tür das Auto ist, hat der Moderator eine oder zwei Auswahlmöglichkeiten.
Danach kann der Teilnehmer seine Auswahl wechseln oder bei der ersten Wahl bleiben.
Diesen 4-Schritt-Prozess: Auto platzieren, Tür aussuchen, falsche Tür öffnen und ggf. Tür wechseln kann man für beide Spieler in einer Strategie zusammenfassen.
Setzt man voraus, dass die Spieler ihre Strategie vor dem Spielen festlegen und beide logischerweise nichts von der des Gegners wissen, wurde das Spiel erfolgreich heruntergebrochen und kann als endliches Nullsummenspiel mit nur einer Entscheidung betrachtet werden.
Bei diesem Spiel hat der Moderator 6 mögliche Strategien zur Auswahl.

(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2)

Er versteckt das Auto hinter Tür x und öffnet Tür y (x,y), sofern er die Auswahl hat, welche der Türen er öffnen kann.
Der Teilnehmer hat 12 mögliche Strategien das Spiel zu spielen.

1bb;1bw;1wb;1ww;b2b;b2w;w2b;w2w;bb3;bw3;wb3;ww3

Dabei wählt er eine der drei Türen aus und legt fest, ob er beim Öffnen der Anderen wechseln „w“ oder bleiben „b“ will. Bei b2w entscheidet sich der Teilnehmer für Tür 2 und bleibt dabei, sollte Tür 1 geöffnet werden, jedoch wechselt er, sollte Tür 3 geöffnet werden.
Nachdem die möglichen Strategien nun bekannt sind, muss noch die optimale Randomisierung gefunden werden.

	Moderator M					
	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)
1bb	1	1	0	0	0	0
1bw	1	0	1	1	0	0
1wb	0	1	0	0	1	1
1ww	0	0	1	1	1	1
b2b	0	0	1	1	0	0
b2w	1	1	1	0	0	0
w2b	0	0	0	1	1	1
w2w	1	1	0	0	1	1
bb3	0	0	0	0	1	1
bw3	1	1	0	0	1	0
wb3	0	0	1	1	0	1
ww3	1	1	1	1	0	0

Der Moderator sollte erst völlig zufällig das Auto hinter einer der Türen verstecken und dann völlig zufällig eine der Türen auswählen.
Damit wählt er jede Spalte zu 1/6.
Mit dieser Randomisierung garantiert er einen maximalen Gewinn vom Mittelwert aller Zeilen, also 3/6.

Der Teilnehmer wählt eine der drei Türen aus.
Dabei ist es für die Gewinnchance völlig egal, für welche er sich entscheidet.
Bei der Entscheidung, ob er bleiben oder wechseln möchte, sollte er sich auf die Strategien mit einem doppelten Wechsel konzentrieren (grün), da sie den größten erwarteten Gewinn bewirken.
Jede der drei grünen Strategien würde dem Teilnehmer eine Gewinnchance von 4/6 sichern.
Für welche dieser Strategien sich der Teilnehmer entscheidet ist vollkommen egal.
Um den Moderator jedoch bestmöglich im Unklaren zu lassen, sollte er sie zu 1/3 randomisieren.

Der Moderator kann also mit seiner Strategie eine maximale Gewinnchance von 2/3 garantieren und der Teilnehmer mit seiner Strategie ebenso eine Gewinnchance von 2/3.
Da beide Spieler-Strategien eine Gewinnchance von 2/3 garantieren können, handelt es sich um eine Gleichgewichtslage.

Wie bei diesem Spiel, kann man sehr viele Spiele, die im ersten Moment nicht nach endlichen Zwei-Spieler-Nullsummenspielen mit einer Entscheidung aussehen, auf eben diese Kategorie herunterbrechen und so die Klasse um ein Vielfaches erweitern.
Dabei müssen es nicht nur so simple Spiele wie das eben gezeigte sein, sondern es können sogar Schach oder Bridge auf nur eine Entscheidung reduziert werden.

4. Verallgemeinerung Nullsummenspiel

4.1 Können Egoisten zusammenarbeiten?

In diesem Kapitel geht es um die große Frage, ob Egoisten zusammenarbeiten können.
Um diese Frage spieltheoretisch genauer untersuchen zu können, muss man von der Klasse der Nullsummenspiele zu den Nicht-Nullsummenspielen wechseln.
Diese Klasse ist um ein Vielfaches größer, als die der Nullsummenspiele, da diese ein Sonderfall der Nicht-Nullsummenspiele sind.
Bei den Nicht-Nullsummenspielen stehen die Interessen der Spieler nicht genau entgegengesetzt, weshalb die Auszahlungsmatrix auf Tupel pro Element erweitert wird.
In diesem Beispiel wäre es absolut logisch, dass beide Spieler die Spielweise R wählen. Es besteht jedoch ein gewisses Risiko, dass einer der Spieler die Spielweise L wählt und somit beide einen Verlust machen.

	L	R
L	(-1,-1)	(-100,-100)
R	(-100,-100)	(+1,+1)

Auch bei den Nicht-Nullsummenspielen wählen beide Spieler gleichzeitig und ohne Kenntnis des Mitspielers.
Das wohl bekannteste Beispiel eines Nicht-Nullsummenspiels ist das sogenannte „Gefangenen-Dilemma“. Dabei geht es darum, dass zwei Verbrecher getrennt von der Polizei verhört werden und die Möglichkeit haben sich gegenseitig zu verraten, also ihre Tat zuzugeben („V“), oder zusammen zu arbeiten und ihre Tat leugnen („Z“).
Je nachdem wie sie sich entscheiden, müssen sie lang oder weniger lang ins Gefängnis.
Da beide Spieler nach der, in der Spieltheorie allgemein vorrausgesetzten, rationalistischen Annahme handeln, versuchen sie das bestmögliche Ergebnis für sich zu erzielen.
Was wäre denn in diesem Spiel das bestmögliche Ergebnis? Angenommen Spieler A würde „Z“ spielen und Spieler B auch, dann wäre der Gewinn von Spieler A -2.
Würde Spieler A „V“ spielen und B bei „Z“ bleiben, wäre der Gewinn von A -1. Spielweise „V“ wäre also besser als „Z“.
Würde Spieler B „V“ spielen, wäre Spieler A ebenfalls mit Spielweise „V“ besser bedient.

		B	
		Z	V
A	Z	(-2,-2)	(-10,-1)
	V	(-1,-10)	(-5,-5)

Da in beiden Fällen Spieler A mit der Spielweise „V“ einen besseren Gewinn erzielt, als mit „Z“, sagt man in der Spieltheorie **„V“ dominiert „Z“.**
Dies gilt genauso für B, daher ist bei zwei absolut rational handelnden Spielern klar, dass beide „V“ spielen.
Es würden also beide Spieler für 5 Jahre ins Gefängnis gehen, obwohl bei Zusammenarbeit beide nur zwei Jahre bekommen würden.
An diesen Beispiel sieht man eindrucksvoll, dass die Maximierung des eigenen Gewinns nicht immer die beste Lage nach sich zieht.
Im Buch wird das Gefangenendilemma nicht mit zwei Gefangenen, sondern mit zwei Geschäftsleuten verdeutlicht, die miteinander Handel betreiben wollen.
Dabei ist das Prinzip dasselbe, lediglich die Vorstellung mit Waren und Geld anstelle von Gefängnisjahren ist etwas anschaulicher.

4.2 Nash-Gleichgewicht

Im obigen Beispiel haben beide Spieler keinen Anreiz einseitig von ihren Strategien abzuweichen.
Wie beim Nullsummenspiel gibt es auch in der Klasse der Nicht-Nullsummenspiele ein Gleichgewicht: das Nash-Gleichgewicht.
Dies ist das wohl wichtigste mathematische Ergebnis der endlichen Nicht-Nullsummenspiele und wurde 1950 von dem Amerikaner John Nash bewiesen.
Wie das Nullsummenspiel eine Spezialform des Nicht-Nullsummenspiels ist, ist der Von-Neumann Satz eine Spezialform des Nash-Gleichgewichts.
Es gibt ein Paar eventuell gemischter Strategien p und q, welche keinen Anreiz bieten im Alleingang davon abzuweichen.
Es gibt immer mindestens ein Paar, jedoch kann ein Spiel auch mehrere Nash-Gleichgewichte haben, welche sogar verschiedene Erwartungswerte haben können.
Das Nash-Gleichgewicht muss dabei nicht immer von Vorteil sein.
In dieser Auszahlungsmatrix ist beispielsweise die Strategie nur R ein Nash-Gleichgewicht mit dem erwarteten Gewinn +1 und gleichzeitig die Strategie nur L ein Nash-Gleichgewicht mit einem erwarteten Gewinn von -1.

	L	R
L	**(-1,-1)**	**(-100,-100)**
R	**(-100,-100)**	**(+1,+1)**

4.3 Lösungsversuch Gefangenendilemma

Um die eigentliche Frage dieses Kapitels, ob Egoisten zusammenarbeiten können, zu beantworten, muss man eine Lösung für das Gefangenendilemma finden.
Diese Frage haben sich bereits seit Jahrzenten viele Forscher gestellt und versucht dieses allgemeingültige Problem des zwischenmenschlichen Vertrauens zu lösen.
Im Grunde gibt es eine sehr einfache Lösung für das Dilemma.
Wenn beide Spieler einfach uneigennützig handeln würden, wäre das Problem gelöst.
Beide würden sich gegenseitig vertrauen und das bestmögliche Ergebnis für alle Beteiligten könnte erzielt werden.

Dabei gibt es jedoch ein elementares Problem: die Evolution.
Jeder Mensch ist ein biologisches Wesen, und damit in dem Wissen, dass uneigennützige Entscheidungen immer eine Benachteiligung nach sich ziehen.
Auf das Beispiel angewandt bedeutet das, dass ein gutgläubiger Mitspieler, der uneigennützig bereit ist zusammenzuarbeiten, potentiell immer verraten werden kann und dann einen riesigen Verlust macht.
Um das Gefangenendilemma zu lösen muss man also einen Weg finden, eine Zusammenarbeit lukrativer zu gestalten, als ein Verrat. Dies erreicht man, indem man das Gefangenendilemma wiederholt spielt.
In diesem Fall wäre eine langfristige Zusammenarbeit lukrativer, als ein einmaliger Verrat.
Beim Verrat würde man langfristig seine Glaubwürdigkeit verlieren und damit einen viel größeren Verlust erzielen, als ein einfacher Verrat Gewinn bringen würde.

4.4 Robert Axelrod Turnier

Wenn man nun so ein Gefangenendilemma wiederholt spielt, stellt sich die Frage, welche Strategie man am besten anwendet.
Diese Frage stellte sich auch Robert Axelrod in den 1970er Jahren und ließ verschiedene Computerprogramme in einem wiederholten Gefangenendilemma Turnier gegeneinander antreten.
Dafür fragte er seine Forscherkollegen nach Computerprogrammen, die ihm insgesamt 14 Stück einsendeten. Als 15. fügte er sein eigenes Programm namens „Zufall“ hinzu. Dieses wählt, genau wie der Name zu vermuten lässt, beide Möglichkeiten mit einer 50% Wahrscheinlichkeit aus.
Nachdem alle Programme das wiederholte Gefangenendilemma 200 Runden gegeneinander gespielt hatten, gewann das kürzeste Programm mit lediglich 4 Zeilen Code.
Das Prinzip dieses Programms war immer das zu spielen, was der Gegner in der Runde vorher gespielt hatte.
Axelrod definierte für das Programm die Attribute freundlich und verzeihend.
Freundlich, weil es niemals von sich aus eine Zusammenarbeit riskiert und verzeihend, weil es auch nachdem es verraten wurde, zu einer Zusammenarbeit zurückkehren kann, wenn der Gegner dies auch versucht.
Auf Grund seiner Verhaltensweise wurde das Programm “Tit for Tat” genannt, was so viel heißt wie: Wie du mir, so ich dir.
Es wurde nun das beste Programm dieser 15 gefunden, aber ist dies auch die allgemein beste Strategie?
Axelrod fand schnell ein Programm, welches “Tit for Tat” geschlagen hätte, womit er wieder bei der Ursprungsfrage angelangt war.
Das Programm, welches TfT geschlagen hätte, wäre “Tit for Two Tat” gewesen.
Dieses Programm funktioniert ähnlich wie TfT, würde jedoch erst den Gegner verraten, wenn es zweimal hintereinander verraten wurde. Es ist somit noch verzeihender als TfT.
Mit diesen Erkenntnissen veranstalte er ein zweites Turnier mit mehr Programmen, um diesmal hoffentlich die Ausgansfrage klären zu können.
Seine Ergebnisse der Analyse des ersten Turniers veröffentlichte er vorher, damit alle Einsender daraus lernen konnten und dieses Wissen in ihre Strategien mit einfließen lassen zu können.
Für das zweite Turnier befragte er nicht nur seine Forscherkollegen, sondern forderte auch Hobbyprogrammierer auf, ihm weitere Programme zu schicken. Am Ende erreichte er eine Teilnehmerzahl von 63 Programmen.
Neben der gestiegen Teilnehmerzahl änderte er auch die Regeln, indem er die Rundenanzahl vorher nicht statisch festlegte, sondern mit Hilfe einer Verteilungsfunktion berechnete.
Damit stellte er sicher, dass niemand die genaue Rundenanzahl kennt und so das wiederholte Gefangenendilemma in ein einfaches Gefangenendilemma herunterbricht.

Wäre die genaue Rundenanzahl bekannt, wäre die letzte Runde ein normales Gefangenendilemma und man könnte ohne Konsequenz Verrat spielen.
Da somit jeder weiß, dass in der letzten Runde Verrat gespielt wird, könnte man auch in der vorletzten Runde Verrat spielen, da die Konsequenz für die letzte Runde irrelevant wäre, weil da sowieso jeder Verrat spielt. Dieses Schema kann so bis zur ersten Runde durchgezogen werden und im Endeffekt würden nur alle wieder Verrat spielen.
Das zweite Turnier wurde durchgeführt und der Sieger war wieder "Tit for Tat".
Aber warum konnte das Programm gewinnen, welches doch offensichtlich durch TfTT geschlagen wird und dieser Umstand wegen der Veröffentlichung auch allen bekannt war?
Dies liegt daran, dass viele Leute TfTT oder ähnliche Programme an den Start brachten, eben weil es den Gewinner von Turnier 1 geschlagen hätte. Andere Leute dachten allerdings noch einen Schritt weiter und sahen diese Häufigkeit von TfTT-Programmen voraus und entwickelten eine Strategie, die nur darauf ausgelegt war, TfTT auszuspielen, wodurch es lediglich Platz 24 erreichte.
Axelrod zog nun die Erkenntnis, dass eine Strategie, nur weil sie im direkten Vergleich besser ist als eine andere, diese nicht zwingend in einem Turnier mit vielen Strategien übertreffen muss.
Er gab TfT noch zwei weitere Eigenschaften, nämlich leicht zu provozieren und vorhersehbar.
Es ist leicht zu provozieren, da es bei Verrat sofort mit Gegenverrat antwortet und vorhersehbar, da die Reaktion nicht zufällig oder sehr komplex ist, sondern einem kinderleichten Schema folgt.
Die weitere Analyse des Turniers ergab, dass die ersten 10 Plätze mit Programmen belegt wurden, die alle die Eigenschaft freundlich aufweisen.
Dieser Umstand, dass zusammenarbeitende Strategien einen deutlich besseren Erfolg haben, ist für unsere Gesellschaft moralisch sehr ermutigend.
Auf dieser Basis würden auch die größten Egoisten zusammenarbeiten, weil sie so den meisten Gewinn erzeugen könnten. Es geht bei TfT nicht nur um blindes Vertrauen, sondern auch um eine lohnende Partnerschaft, die für beide Seiten lukrativ ist.

4.5 "Tit or Tat" im Alltag

Nun stellt sich die Frage, ob man mit diesen Erkenntnissen noch mehr zwischenmenschliche Probleme lösen kann, als nur das Gefangenendilemma.
Würden die Menschen eine TfT-Haltung an den Tag legen, könnte man sehr viele Dinge einfacher lösen, da ein gegenseitiges Grundvertrauen herrschen würde.
Wie erkennt man jedoch, ob sich ein Mensch nach TfT verhält oder nicht? Eine der positiven Eigenschaften von TfT ist glücklicherweise die schnelle Erkennbarkeit. So können zwei Mitmenschen schnell eine Basis an Vertrauen schaffen und lukrativ zusammenarbeiten.
Jedoch lädt diese schnelle Erkennbarkeit auch zu Missbrauch ein, dass ein gewisses Maß an Misstrauen zwingend notwendig ist, um nicht in wichtigen Momenten ein böses Erwachen zu haben.
Wendet man TfT auf den Alltag an erkennt man, dass diese Haltung viele Dilemmata zu lösen vermag. Beispielsweise wohnen mehrere Studenten zusammen in einer WG. Diese hat einen Waschraum, der von allen benutzt wird. Nach Benutzung stellt sich die Frage, ob man ihn wieder sauber machen sollte oder nicht.
Handeln alle Mitbewohner nach TfT, wäre der Waschraum vor der Benutzung sauber und man selbst würde ihn ebenfalls sauber hinterlassen. Dieses Gleichgewicht würde solange funktionieren, bis einer davon abweicht.
Aus diesem Gleichgewicht, welches sehr häufig in unser Gesellschaft auftritt, kann man die These aufstellen, dass: "Menschen immer das tun, was ihre Mitmenschen auch tun".
Diese These kann darauf gestützt werden, dass die Menschen über Jahre der Evolution eine allgemeine TfT-Haltung entwickelt haben, die in vielen sozialen Gruppen ihren Anklang findet.
Ein großes Problem bleibt jedoch bei der allgemeinen TfT-Haltung: die Fehleranfälligkeit.
Würden sich die Menschen strikt an TfT halten und es käme aus irgendwelchen Gründen zu einem "Übertragungsfehler", dass beide Mitmenschen eigentlich zusammenarbeiten wollen, es für den einen jedoch so aussieht, als ob der andere ihn verrät, würde dies in einem Teufelskreis des gegenseitigen Verrats enden, obwohl keiner der Personen den Gegenüber aktiv verraten hat.
Dieses Problem kann man glücklicherweise leicht umgehen, indem man, nicht wie in der Spieltheorie, eine zusätzliche Kommunikation der zwei Parteien erlaubt.
Mit dieser Verhaltensstrategie, einer allgemeinen TfT-Haltung mit zusätzlicher Kommunikation, wären viele Dilemmata der Menschheit gelöst.

5. Abschluss

Nachdem nun eben mit Hilfe der Spieltheorie ein Teil der zwischenmenschlichen Interaktion analysiert wurde, stellt sich die Frage, ob nicht einfach alles menschliche Handeln so analysiert werden kann.
Die Antwort darauf ist ganz klar: nein. In der Spieltheorie stützen sich alle Analysen auf die rationalistische Annahme zum maximalen Eigennutz.
Für das menschliche Handeln würde das bedeuten, dass jede Entscheidung, auch vermeintlich uneigennützige, auf puren Eigennutz zurückzuführen ist.
Diese Reduktion wurde schon immer sehr kontrovers diskutiert und bis heute ist man sich uneinig darüber.
Zum Ende meines Seminarvortrages habe ich die Frage an das Auditorium gestellt und ebenso möchte ich sie hier stellen. Überlegen Sie in Ruhe und entscheiden Sie für sich selbst:

Handelt der Mensch uneigennützig?