NAME: ______________________ TUTORIUM(TERMIN): ______

GTI, FORMALE LOGIK UND VERIFIKATION SS 2018

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Übungsblatt 06 (4 Aufgaben) S.1/2

fhwedel UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1)

Das folgende Programm berechnet eine natürliche Potenz von b deutlich schneller als die einfachere Methode, n mal b mit sich selbst zu multiplizieren. Hier soll nicht bewiesen werden, dass das schneller geht, sondern nur dass das Programm überhaupt das gewünschte Ergebnis liefert. Der Geschwindigkeitsgewinn kann für große n leicht durch ein eigenes Programm nachgeprüft werden.

```
φ  ⇔  b ∈ R ∧ n ∈ N

   result := 1;
   base := b;
   exp := n;

   while exp > 0
     begin
       if (exp MOD 2 = 1) then
         begin
           result := result * base;
           exp := exp - 1;
         end
       else
         begin
           base := base * base;
           exp := exp DIV 2;
         end;
     end; {while}
ψ ⇔ result = b^n
```

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über k: $b^n = base_k^{exp_k} \cdot result_k$
(Hierbei sind $base_k$, exp_k und $result_k$ die Werte der Variablen nach dem k-ten Schleifendurchlauf)
Tipp: Unterscheiden Sie in Ihrem Induktionsbeweis die beiden Fälle, ob exp_k gerade ist oder nicht!

b) Folgern Sie daraus, dass das Programm mit der gewünschten Nachbedingung stoppt.

Aufgabe 2)

Betrachten Sie folgendes Programm:

```
Gegeben seien n Zahlen a[1] ... a[n] ∈ ℚ.

m := 0; k := 0;
while (k < n) do
  begin
    m := k * m;
    k := k + 1;
    m := (m + a[k])/k ;
  end
```

a) Geben Sie die Invariantenbedingungen m_i und k_i an, die nach jedem Schleifendurchlauf erfüllt sind! Brauchen Sie Vorbedingungen dafür?

b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Invariantenbedingungen von a) mit vollständiger Induktion!

c) Geben Sie an, nach wie vielen Durchläufen die Schleife abbricht und folgern Sie mit Hilfe von a) eine Nachbedingung für m. Falls Sie in a) eine Vorbedingung formuliert haben, dürfen Sie diese weiterhin benutzen!

Aufgabe 3)

Was berechnet die folgende Prozedur? Was ist die schwächste Vorbedingung dafür? (Beweis!)

Hinweis: Beweis durch vollständige Induktion über einen der Parameter.

```
procedure rekursiv(m,n: integer): integer

begin
   if (n<=0)
      return 0
   else
      return m + rekursiv(m, n-1);
end;
```

Aufgabe 4)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
function f(x, y, z : N) : N;
begin
   if (y=0) then
       return x*z
   else
      return f(x+z, y-1, z);
end;
```

a) Was ist f(3,4,2)? *(Zwischenschritte angeben!)*

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über einen der Parameter, dass die Funktion $xz+yz^2$ berechnet.