# *Diskrete Mathematik*

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kapitel 1: Grundlagen der Mathematik

**Referenzen zum Nacharbeiten:**

Iwanowski/Lang 1
Meinel 1
Dean 3, 4

# Organisationsform dieser Vorlesung

## Vorlesung (Präsentation des neuen Stoffs im Frontalunterricht):

2 Lehreinheiten pro Woche bei Prof. Iwanowski

## Übungsaufgaben (selbständige Übung des neuen Stoffs):

werden einmal pro Woche ausgegeben zur selbständigen Bearbeitung (veranschlagter Zeitaufwand inklusive Nacharbeit der Vorlesung: 5 Stunden pro Woche)

# Organisationsform dieser Vorlesung

## Große Übung für alle:

1 Lehreinheit pro Woche bei Cordula Eichhorn.
Dort werden die Lösungen der Übungsaufgaben für alle vorgeführt.

## Tutorien (Arbeiten in Kleingruppen):

1 Lehreinheit pro Woche bei einem Studenten höheren Semesters.
Dieser Student bespricht auch die bearbeiteten Übungsaufgaben.
Jeder Student wird in ein Tutorium eingeteilt (studiengangsabhängig). Das Tutorium selbst sollte nur besucht werden von denen, die Nachhilfe brauchen.

# Inhaltlicher Umfang dieser Vorlesung

## Inhaltliche Voraussetzungen:

Logisches Denken, Mathematik bis 9. Klasse (Gymnasium)

## Lernziele dieser Vorlesung:

Verständnis für Mathematik und Freude daran

Elementare Konzepte: Logik, Mengenlehre, Zahlen

Fortgeschrittene Konzepte: Beweisstrategien, Zahlentheorie, Algebra

Spezielle Gebiete der Diskreten Mathematik: Kombinatorik, Graphentheorie

## Direkte inhaltliche Relevanz für folgende Vorlesungen:

Informationstechnik, Digitaltechnik, Programmstrukturen, Grundlagen der Theoretischen Informatik, Algorithmen und Datenstrukturen, Datenbanken, Analysis, Lineare Algebra

# Literatur

## Lehrbuch, nach dem diese Vorlesung vorgeht:

Sebastian **Iwanowski** / Rainer **Lang**: *Diskrete Mathematik mit Grundlagen,*
Springer-Verlag 2014, ISBN 978-3-658-07130-1 (Print), 978-3-658-07131-8 (Online)

## Lehrbücher, die teilweise den Lehrstoff abdecken:

Neville **Dean**: *Diskrete Mathematik,*
Pearson Studium, Reihe "im Klartext" 2003, ISBN 3-8273-7069-8

Albrecht **Beutelspacher** / Marc-Alexander **Zschiegner**:
*Diskrete Mathematik für Einsteiger*,
Vieweg 2004 (2. Auflage), ISBN 3-528-16989-3

Christoph **Meinel** / Martin **Mundhenk**:
*Mathematische Grundlagen der Informatik,*
Teubner 2002 (2. Auflage), ISBN 3-519-12949-3

Angelika **Steger**: *Diskrete Strukturen*, Bd.1, Springer 2001, ISBN 3-540-67597-3

# Literatur

## Weiterführende Lehrbücher, die für einige Kapitel hilfreich sind:

Martin Aigner: *Diskrete Mathematik*,
Vieweg 2001 (4. Auflage), ISBN 3-528-37268-0

Norman Biggs: *Discrete Mathematics*,
Oxford University Press 2002, ISBN 0-19-850717-8

Jiri Matousek / Jaroslav Nesetril:
*Diskrete Mathematik - Eine Entdeckungsreise,*
Springer-Verlag 2001, ISBN 3-540-42386-9

# 1. Grundlagen der Mathematik

## 1.1 Einführung

**Was ist das Wesentliche der Mathematik ?**

**Mathematik ist in erster Linie das Erkennen von:**

- Strukturen
- Zusammenhängen
- Verallgemeinerungen
- Gemeinsamkeiten

**Erst aus diesen Prinzipien folgert man:**

- Rechenregeln
- Vorgehensweisen (Algorithmen)

**Formalismen dienen in der Mathematik zu**

- einer eindeutigen Ausdrucksweise
- einem besseren Verständnis für den Menschen

# 1. Grundlagen der Mathematik

## 1.1 Einführung

**Was ist Diskrete Mathematik ?**

- Logik
- Mengenlehre
- Diskrete Zahlenbereiche
- Kombinatorik
- Graphentheorie
- Algebra

**Was gehört nicht zur Diskreten Mathematik ?**

- Analysis / Funktionentheorie
- Lineare Algebra
- Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik
- ...

# 1.2 Aussagenlogik

## Aussagen und Wahrheitswerte

### Was ist eine Aussage ?

- Eine *elementare* Aussage ist ein beliebiges Objekt.
- Elementare Aussagen sind unteilbar.
  - Wegen der Unteilbarkeit heißen elementare Aussagen auch *Atome*

### Was ist ein Wahrheitswert ?

- Ein Wahrheitswert ist ein Element aus einer zweielementigen Menge (z.B. dargestellt als {`w, f`} oder {0,1}).

### Was macht die Aussagenlogik ?

- Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit Funktionen, die jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.
  - Solche Funktionen heißen *binäre Funktionen*

# 1.2 Aussagenlogik

## Operatoren zwischen Aussagen

**Durch Operatoren werden aus alten Aussagen neue Aussagen geschaffen:**

**<u>Einstelliger Operator:</u>**

- **Negation (¬)**

**<u>Zweistellige Operatoren:</u>**

- **Konjunktion (∧)**
- **Disjunktion (∨)**
- **Implikation (→)**
- **Äquivalenz (↔)**

**Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:**

| p | q | ¬p | p ∧ q | p ∨ q | p → q | p ↔ q |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | w | f | f | w | w |

p → q

hinreichend notwendig

stärker (genauer) schwächer (ungenauer)

p ↔ q

hinreichend und notwendig

gleichwertig

# 1.2 Aussagenlogik

## Zusammenhang zwischen den Operatoren

**Logische Äquivalenzregeln:**

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

*Kontraposition*

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

*Ersetzen der Implikation durch ¬ und ∨*

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

*Ersetzen der Äquivalenz durch Implikationen*

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

*deMorgansche Regeln*

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

*Doppelte Negation*

**Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:**

| p | q | ¬p | p ∧ q | p ∨ q | p → q | p ↔ q |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | w | f | f | w | w |

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

*Kommutativgesetze*

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

*Distributivgesetze*

# 1.2 Aussagenlogik

## Zusammenhang zwischen den Operatoren

### Logische Schlussregeln:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

*Modus ponens*

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

*Modus tollens*

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

*Kettenschluss*

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p$

*Indirekter Beweis*

### Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | w | f | f | w | w |

$p \wedge q \Rightarrow p$ $\quad$ $p \wedge q \Rightarrow q$

*Logische Einschränkung*

$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$

*Logischer Ausschluss*

# 1.3 Prädikatenlogik

## Aussageformen, Variable und Prädikate

**Was ist eine Aussageform ?**

- Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit Variablen aus bestimmten Definitionsbereichen.
- Die Belegung jeder Variable mit einem zulässigen Wert macht aus einer Aussageform eine Aussage

**Was ist ein Prädikat ?**

- Ein Prädikat gehört zu einer Aussageform und beschreibt die Eigenschaft einer Wertekonstellation, eine Aussageform zu einer wahren Aussage zu machen.
- Für jede Wertekonstellation von Werten aus dem Definitionsbereich der Variablen ist das zu der jeweiligen Aussageform gehörende Prädikat definiert.
- Ein Prädikat kann wahr (erfüllt) oder falsch (nicht erfüllt) sein.

# 1.3 Prädikatenlogik

## Quantoren

- **für Aussageformen, die nur von x abhängen:**

**Der Existenzquantor $\exists x\ (...)$ beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für $x$ gibt, der die dahinter stehende Aussageform in $x$ zu einer wahren Aussage macht.**

**Der Allquantor $\forall x\ (...)$ beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für $x$ die dahinter stehende Aussageform in $x$ zu einer wahren Aussage macht.**

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*, für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

# 1.3 Prädikatenlogik

## Quantoren

- **für Aussageformen, die von weiteren Variablen abhängen:**

  **Existenzquantor $\exists x$ (...) und Allquantor $\forall x$ (...) beschreiben Aussage*formen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über x die Aussage bereits gemacht ist.**

Beispiel 1.2

$$A^*(z) := \exists x \in D : \forall y \in E : A(x, y, z)$$

Wenn $A(x, y, z)$ die Aussageform ist, dass die Zeugnisnote $x$ für das Fach $y$ an den Studenten $z$ vergeben wird, also $D$ die Menge der möglichen Zeugnisnoten und $E$ die Menge aller Fächer ist, dann ist in diesem Beispiel die Aussageform $A^*(z)$, dass es eine Zeugnisnote gibt, die Student $z$ in allen Fächern erhalten hat. Der Wahrheitswert der Aussageform $A^*(z)$ hängt nur noch davon ab, welcher Student für $z$ eingesetzt wird: Manche Studenten $z$ haben tatsächlich in jedem Fach dieselbe Note erhalten (für diese $z$ ist $A^*(z)$ wahr), andere haben unterschiedliche Noten erhalten (für jene $z$ ist $A^*(z)$ falsch).

Dies macht aus der Aussageform $A(x, y, z)$ durch die Bindung von $x$ und $y$ an Quantoren also eine neue Aussageform $A^*(z)$, deren Wahrheitswert nur noch von der freien Variablen $z$ abhängt. Im Allgemeinen wird aus einer Aussageform durch die Bindung von Quantoren genau dann eine Aussage, wenn *jede Variable* durch einen Quantor gebunden wird.

# 1.3 Prädikatenlogik

## „Rechenregeln“ für die Quantoren:

$\neg\forall x\,(F(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x))$

$\neg\exists x\,(F(x)) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg F(x))$

*Verallgemeinerung von deMorgan*

$\forall x\,\forall y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y\,\forall x\,(F(x,y))$

$\exists x\,\exists y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y\,\exists x\,(F(x,y))$

*Vertauschung gleicher Quantoren*

**Was gilt bei der Vertauschung verschiedener Quantoren ? ($\Leftrightarrow,\Rightarrow,\Leftarrow,\not\Leftrightarrow$)**

$\exists x\,\forall y\,(F(x,y))$ $\qquad$ $\forall y\,\exists x\,(F(x,y))$

$\exists y\,\forall x\,(F(x,y))$ $\qquad$ $\forall x\,\exists y\,(F(x,y))$

# 1.3 Prädikatenlogik

## „Rechenregeln“ für die Quantoren:

**Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in $\wedge$ oder $\vee$ ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)**

$\forall x\,(F(x)) \vee \forall x\,(G(x))$ $\qquad$ $\forall x\,(F(x) \vee G(x))$

$\forall x\,(F(x)) \wedge \forall x\,(G(x))$ $\qquad$ $\forall x\,(F(x) \wedge G(x))$

$\exists x\,(F(x)) \vee \exists x\,(G(x))$ $\qquad$ $\exists x\,(F(x) \vee G(x))$

$\exists x\,(F(x)) \wedge \exists x\,(G(x))$ $\qquad$ $\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$

# 1.3 Prädikatenlogik

## Arithmetische Vergleichsprädikate:

| Präfix-Notation (Standard in Prädikatenlogik) | Infix-Notation (Standard in Arithmetik) | Postfix-Notation (Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern) |
|---|---|---|
| `lessThan (x,y)` | $x < y$ | $x,\ y,\ <$ |
| `equal (x,y)` | $x = y$ | $x,\ y,\ =$ |

**Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:**

$x \leq y \qquad x \geq y \qquad x \neq y \qquad x > y$

***Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?***

# 1.3 Prädikatenlogik

## Übersetzung Umgangssprache in prädikatenlogische Formeln

| Umgangssprache | Formel |
| --- | --- |
| Objekte mit Eigenschaft E haben auch Eigenschaft F. | $\forall x\ E(x) \rightarrow F(x)$ |
| Nur Objekte mit Eigenschaft E haben auch Eigenschaft F. | $\forall x\ E(x) \Leftrightarrow F(x)$ |
| Höchstens Objekte mit Eigenschaft E haben auch Eigenschaft F. | $\forall x\ F(x) \rightarrow E(x)$ |
| Nur x hat die Eigenschaft F. | $\forall y\ F(y) \Leftrightarrow y=x$ |
| Höchstens x hat die Eigenschaft F. | $\forall y\ F(y) \rightarrow y=x$ |
| Alle Objekte haben die Eigenschaft F. | $\forall x\ F(x)$ |
| Kein Objekt mit Eigenschaft E hat Eigenschaft F. | $\forall x\ E(x) \rightarrow \neg F(x)$ |
| Kein Objekt hat die Eigenschaft F. | $\forall x\ \neg F(x)$ |
| Einige Objekte mit Eigenschaft E haben auch Eigenschaft F. | $\exists\ x\ E(x) \wedge F(x)$ (keine Implikation!) |
| Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F. | $\forall x\ E(x) \rightarrow F(x)$ |
| Objekte x mit Eigenschaft E sind die Objekte mit Eigenschaft F. | $\forall x\ E(x) \Leftrightarrow F(x)$ |

# 1.3 Prädikatenlogik

## Übersetzung Umgangssprache in prädikatenlogische Formeln

| Umgangssprache | Formel |
| --- | --- |
| Für alle Objekte x, für die es ein n gibt mit P(x,n), gibt es ein m mit Q(x,m) | $\forall x\ \forall n\ \exists\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$ |

**Warnung!**

$\forall x\ \forall n\ \forall\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$ ist eine stärkere Aussage:
Jetzt müsste Q(x,m) für alle m gelten, wenn es für x ein $n_0$ gibt mit $P(x,n_0)$.

$\forall x\ \exists\ n\ \exists\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$ ist eine schwächere Aussage:
Jetzt müsste Q(x,m) für kein m gelten, selbst wenn es für x ein $n_0$ gibt mit $P(x,n_0)$: Denn man könnte in P(x,n) einfach ein $n_1 \neq n_0$ einsetzen mit $P(x,n) = \perp$, und dann muss Q(x,m) niemals wahr sein.

## Beispiel:

**Alle Leute, die verheiratet sind, haben einen Trauzeugen.**