



Irrationalität einer Zahl

Seminar: Elegante Beweise

Dozent: Prof.Dr. Iwanowski

Referent: Arif Özütemiz

Datum: 16.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung & Motivation

1.1. Vorgehensweise beim Beweisen

2. Beweis zu e^1

3. Beweis zu e^r

3.1. Kurzer Beweis

3.2. Langer Beweis

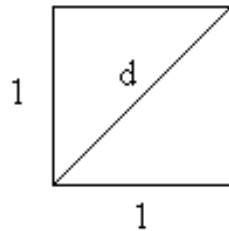
4. Statement zum Beweis von π^2

Einleitung & Motivation

- Irrationale Zahlen sind reelle Zahlen
- Es gibt algebraische und transzendente Zahlen
- Eigenschaft: Sie sind nicht als Bruch darstellbar und die Dezimaldarstellung ist nicht periodisch und bricht nicht ab

Einleitung & Motivation

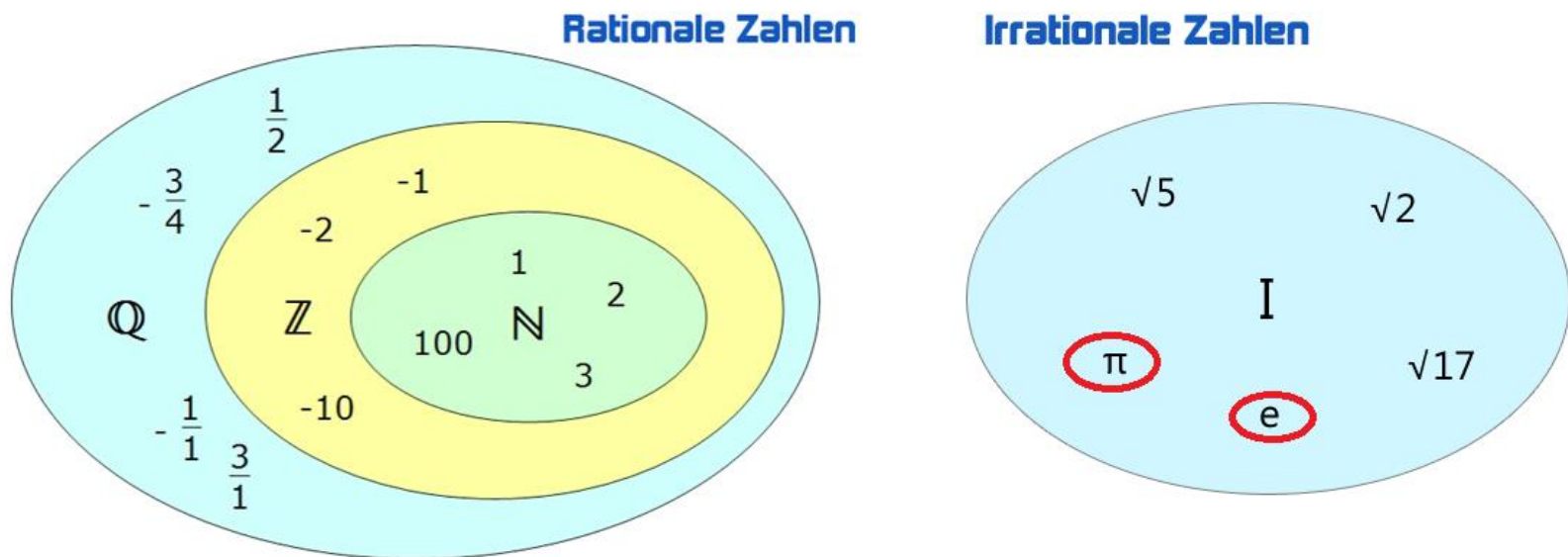
- Entdeckung der irrationalen Zahlen im 5. Jahrhundert



- d konnte nicht als Bruch dargestellt werden $\rightarrow d$ ist irrational
- Es gibt immer noch Zahlen, deren Irrationalität vermutet werden

Einleitung & Motivation

- Einige irrationale Zahlen



Vorgehensweise beim Beweisen

- Indirekter Beweis
- Annahme: Die Zahl sei rational
- Darstellbar als Bruch: $a = \frac{b}{c}$
- Am Ende wird ein Widerspruch erzeugt

Beweis zu e^1

- Annahme: e sei rational $e = \frac{p}{q}$

• Es gilt: $p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd und $2 < e < 3$ mit $q \geq 2$

• Für die Berechnung für e wird die sog. Reihendarstellung benutzt

• Reihendarstellung von e : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad | \cdot q!$$

$$\iff q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots$$

- Getrennte Betrachtung der linken und rechten Seite der Gleichung, um ein Widerspruch zu erzeugen

Beweis zu e^1

- Die linke und rechte Seite werden separat betrachtet

• Linke Seite: $q!e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{N}$

• Rechte Seite: $\underbrace{q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!}}_S + \underbrace{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots}_T$

- $S \in \mathbb{N}$, da alle Nenner von $1!$ bis $q!$ Teiler des Zählers $q!$ sind

• Betrachtung von T:

$$T = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots$$

$$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \mid \text{mit } q \geq 2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

- Geometrische Reihe auf Basis von T bilden, um eine Abschätzung

nach oben zu machen

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Beweis zu e^1

$$T < \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

- Diese Reihe ist eindeutig größer als T.

- Die Summe dieser Reihe wird bestimmt

- Allgemeine Formel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a \cdot q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \mid \text{mit } q = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{3}$

$$T < \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

- T muss zwischen 0 und 0,5 liegen $\rightarrow T \notin \mathbb{N}$

$$\underline{q!e} = \underline{S} + \underline{T}$$

$\in \mathbb{N} \quad \in \mathbb{N} \quad \notin \mathbb{N}$

- Man erhält ein Widerspruch // q.e.d.

Beweis zu e^r - Kurzer Beweis

- Zu Beweisen: e^r ist für alle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ irrational.

Sei $r = \frac{s}{t}$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{Z}$

- Annahme: e^r sei rational

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } e^{\frac{s}{t}} &= \frac{p}{q} \\ \iff (e^{\frac{s}{t}})^t &= \frac{p^t}{q^t} \\ \iff e^s &= \frac{p^t}{q^t} \end{aligned}$$

- Wenn $e^{\frac{s}{t}}$ rational wäre, dann wäre auch e^s rational.
- Es reicht aus e^s zu beweisen

Beweis zu e^x - Langer Beweis

Informationen für den Beweisablauf

- Es gibt drei Lemmata von Charles Hermite, die angenommen werden
- Man verwendet eine bestimmte Funktion als gegeben

$$F(x) = s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \pm \dots + s^{2n-2n} f^{(2n)}(x)$$

- $F(x)$ wird mit e^{sx} verknüpft
- Diese Funktion wird abgeleitet $\rightarrow F'(x)$
- Man bildet die Stammfunktion und erhält ein Wert N .
- Dieses N ist ganzzahlig
- N wird nach unten und nach oben abgeschätzt, um ein Widerspruch zu erzeugen.

Beweis zu e^r - Langer Beweis

- Annahme: Sei e^s rational
- Dann gilt: $e^s = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ $a, b > 0$
- Betrachtung der Funktion $F(x)$ ins Unendliche bzgl. der Ableitungen von $f(x)$
- Laut Lemma 1 sind Ableitungen mit $k > 2n$ gleich 0
- Also kann man $F(x)$ auch folgendermaßen schreiben

$$F(x) = s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \pm \dots$$

- Warum ist die Betrachtung der Funktion $F(x)$ ins Unendliche notwendig ?
- $\rightarrow$ Um $F'(x)$ (anders) darzustellen.

Beweis zu e^r - Langer Beweis

- Darstellung von $F'(x)$:

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x)$$

- $F(x)$ wird zum einen mit $-s$ multipliziert und zum anderen explizit abgeleitet

- Konkret:

- I) $-sF(x) + s^{2n+1}f(x) = \underline{s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f''(x) \pm \dots}$ mit $-s$ multipliziert

- II) $F'(x) = \underline{s^{2n}f'(x) - s^{2n-1}f''(x) \pm \dots}$ explizit abgeleitet

- $\rightarrow F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x)$

Beweis zu e^x - Langer Beweis

- $F(x)$ wird mit e^{sx} verknüpft und abgeleitet

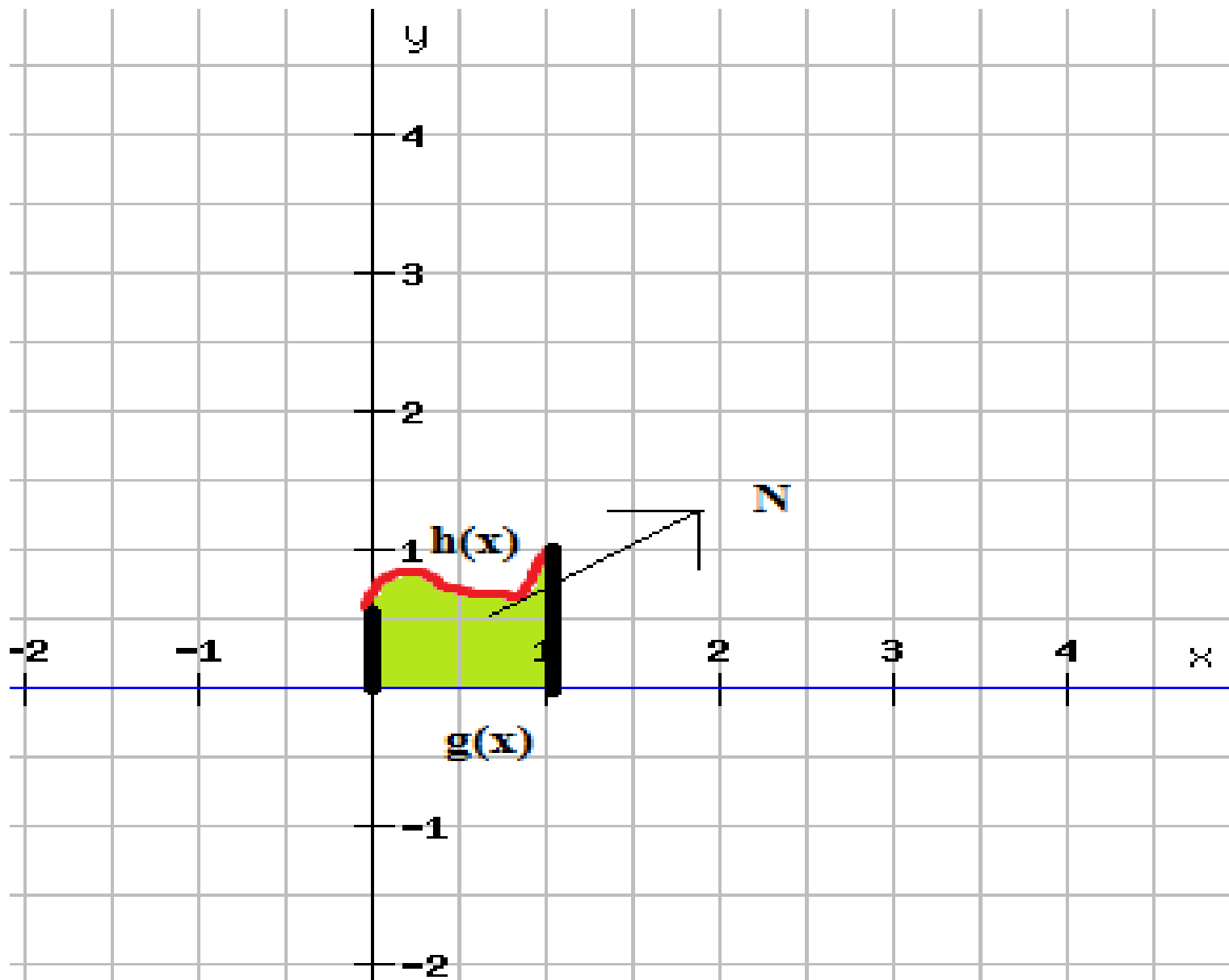
$$\frac{d}{dx}[e^{sx} F(x)] = se^{sx} F(x) + e^{sx} F'(x) \mid \text{mit } F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[e^{sx} F(x)] = seF(x) + e^{sx} F'(x) = s^{2n+1} e^{sx} f(x)$$

- D.h., dass die Stammfunktion von $s^{2n+1} e^{sx} f(x)$ gleich $e^{sx} F(x)$ ist
- Man berechnet eine Fläche N zwischen dem Integrationsbereich 0 und 1 – Integrationsbereich von 0 und 1 aus Einfachheitsgründen.

$$N = b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x) dx = b [e^{sx} F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0)$$

Beweis zu e^r - Langer Beweis



Beweis zu e^r - Langer Beweis

$$N = b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x) dx \quad N = aF(1) - bF(0) \in \mathbb{Z}$$

- Aus Lemma 3 gilt, dass N eine ganze Zahl sein muss
- N wird nach unten und nach oben abgeschätzt, um ein Widerspruch zu erhalten

- Abschätzung nach unten

- Mit $f(x) = 0$ erhält man folgendes:
$$N > b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} 0 \, dx$$
$$N > 0$$

- Abschätzung nach oben

- Mit $f(x) = \frac{1}{n!}$ erhält man folgendes:
$$N < b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} \frac{1}{n!} dx$$

Beweis zu e^r - Langer Beweis

$$N < bs^{2n+1} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{sx} dx$$

• Stammfunktion bilden:

$$bs^{2n+1} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{sx} dx = \left[\frac{1}{s} e^{sx} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n!} bs^{2n+1} \left(\frac{e^s}{s} - \frac{1}{s} \right)$$

• Als Sicherheit für das Abschätzen nach oben wird in der Klammer nur e^s als relevant angesehen.

• Mit $a = e^s b$ erhält man folgendes:

$$\frac{as^{2n+1}}{n!}$$

• Somit gilt:

$$0 < N < \frac{as^{2n+1}}{n!}$$

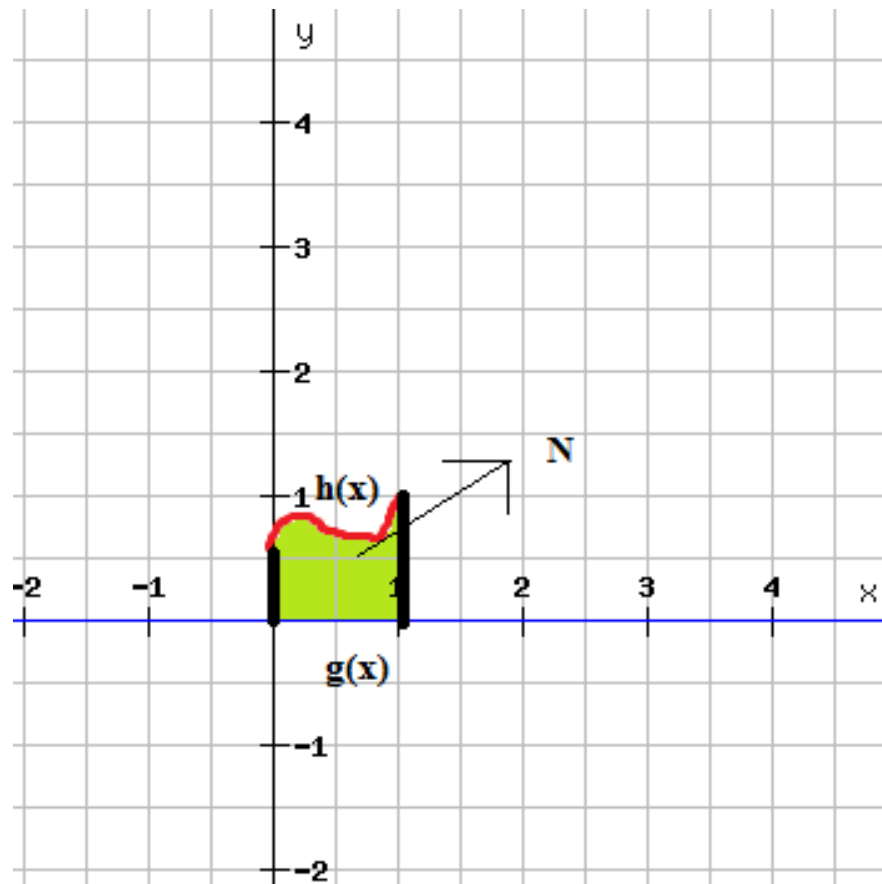
• Frage: Wie groß müsste die obere Abschätzung sein, damit man ein Widerspruch erzeugen kann ?

Beweis zu e^r - Langer Beweis

- N muss kleiner als 1 sein.
- Es muss gelten $n! > as^{2n+1}$
- Wähle n so groß, damit gilt : $n! > as^{2n+1}$

Beweis zu e^r - Langer Beweis

- Da $n! > as^{2n+1}$ ist, liegt N zwischen 0 und 1
- N ist jedoch $\in \mathbb{Z}$. Somit erhält man ein Widerspruch. //q.e.d.
- Anschaulich:



Statement zum Beweis von π^2

Kompletter Beweis wird nicht detailliert aufgeführt:

- 1) Die Funktion $F(x)$ ist zu kompliziert
 - 2) Das Bilden der Stammfunktion ist kompliziert
- Die Beweisführung ist nicht hilfreich, um die Irrationalität nachvollziehbarer bzw. verständlicher zu gestalten.

Statement zum Beweis von π^2

- Annahme: π^2 sei rational
- Darstellbar als : $\pi^2 = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 0$
- Analoges Beweisverfahren zu e^s
- Hilfsfunktion $F(x)$ mit den drei Lemmata

$$F(x) = b^n (\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) \pm \dots)$$

$$\text{mit } F^{(2)}(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$$

π mit $F(x)$ verknüpfen und ableiten

$$\frac{d}{dx} [F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x]$$

$$= (F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x)) \sin \pi x$$

$$= b^n \pi^{(2n+2)} f(x) \sin \pi x$$

$$= \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x$$

Statement zum Beweis von π^2

- Integral berechnen

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} [F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x]_0^1 \\ &= F(1) + F(0) \end{aligned}$$

- N ist aufgrund von Lemma 3 ganzzahlig
- Für die Abschätzung wird n so groß gewählt, so dass gilt:

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

- Widerspruch, da N ganzzahlig ist. //q.e.d.

Quellen

- Das BUCH der Beweise, Springer 2004 (2. Auflage)
- <http://www.sofatutor.com/mathematik/videos/irrationalitaet-der-eulerschen-zahl-e>
- https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl



Vielen Dank für eure
Aufmerksamkeit !