Das Dinitz-Problem

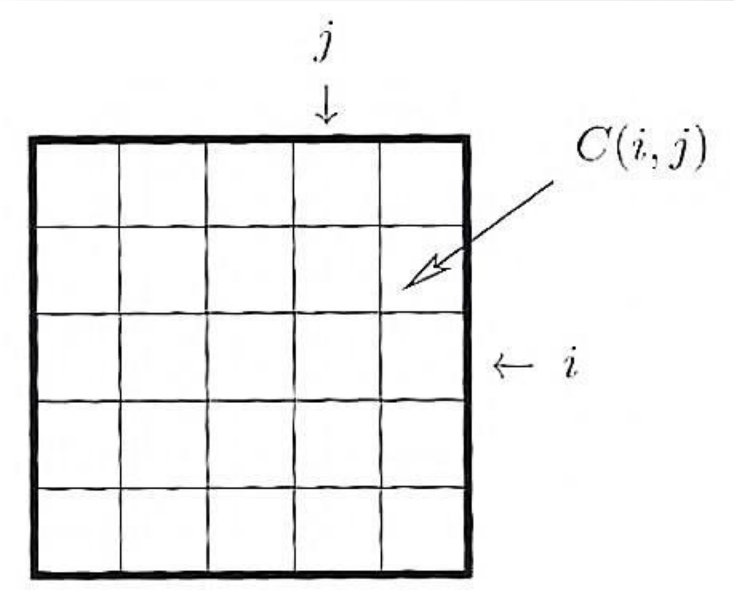
Vervollständigung von Farben in Quadraten

Agenda

- Einführung in Problemstellung mit Differenzierung zu den Lateinischen Quadraten
- Übersetzung in die Graphentheorie
- Herleitung von zwei Resultaten
- Kombination der beiden Resultate
- Fazit
- Quellen

Was wollen wir beweisen?

- „Angenommen, wir haben für jedes der n^2 Felder eines ($n \times n$) Quadrats eine Menge von n Farben zur Verfügung. Ist es dann immer möglich, so jedes Feld eine seiner Farben zuzuweisen, dass keine zwei Felder in derselben Zeile oder Spalte dieselbe Farbe erhalten?“



- Jedes Feld (i, j) besitzt eine Menge $C(i, j)$ an Farben.

Beispiel für n=2

$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,3\}$	$\{2,3\}$

- Wir wählen in der ersten Zeile die Zahlen **1** und **2**.
  Es ist unmöglich die zweite Zeile richtig zu lösen und somit können wir nicht jede Permutation in der ersten Zeile wählen.

Worin besteht der Unterschied zu den Lateinischen Quadraten?

- Wenn die Farbmengen aller Felder unseres **(n x n)**-Quadrates gleich sind, entspricht die Problemstellung der des vorherigen Vortrag.
- Folglich ist der Beweis für diesen Spezialfall bereits gegeben.

- Worin besteht der Unterschied, wenn **C** $:= \cup_{i,j}$ **C(i, j)** insgesamt sogar größer als **n** ist?

⇒ Nicht alle Farben aus **C** sind in jedem Feld verfügbar. Somit kann für die erste Zeile nicht jede Permutation gewählt werden!

Übersetzung des Problems in die Graphentheorie

- Der Graph sei durch **G = (V, E)** definiert
- **χ(G)** beschreibt die „chromatische Zahl" des Graphen **G** (Mindestanzahl an Farben, um benachbarte Ecken unterschiedlich zu färben)
- Eine Menge $\mathbf{A} \subseteq \boldsymbol{V}$ ist unabhängig, wenn es zwischen keinem der Elemente aus **A** Kanten gibt.

Einführung der „listen-chromatischen" Zahl

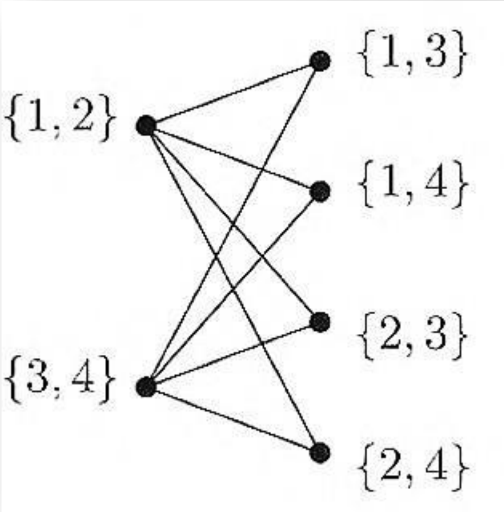
- Listenfärbung meint eine Färbung $\mathbf{c: V \to \cup_{v \in V} C(v)}$ mit $\mathbf{c(v)} \in \mathbf{C(v)}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

- Die listen-chromatische Zahl ist die kleinste Zahl **a**, sodass für die Anzahl **jeder!** Liste von Farbmengen $|\mathbf{C(v)}| = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ gilt und eine gültige Färbung existiert.

- Notation: $\boldsymbol{\chi_l(G)}$

Gilt allgemein $\chi(G) = \chi_l(G)$?

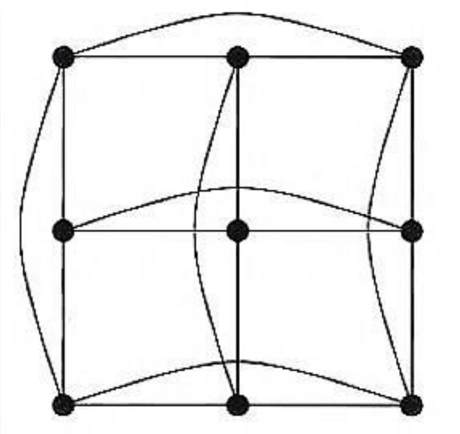
- Vermutung, dass die chromatische und die listen-chromatische Zahl immer gleich sein könnten.
  - Der Graph **$K_{2,4}$** mit frei gewählten Farblisten.
  - Die chromatische Zahl ist **$\chi(G) = 2$**. (Farbe 1 für linke und Farbe 2 für rechte Ecken)
  - Mit diesen Farblisten ist keine Färbung möglich!
  - Für $K_{2,4}$ gilt **$\chi_l(G) \geq 3$**.



Neuformulierung der Problemstellung

- Offensichtlich gilt immer $\chi_l(G) \leq |V|$
- $\chi(G) \leq \chi_l(G)$ gilt durch den Spezialfall dass alle **C(v)** identisch sein könnten.

- Der Graph S_n ist ein **(n x n)**-Quadrat mit n^2 Feldern. (Beispiel S_3)
- Ecken in einer Zeile oder Spalte sind benachbart.
- Durch Lateinische Quadrate wissen wir: $\chi(S_n) = n$.
- Zu beweisen: $\chi_l(S_n) = n$.



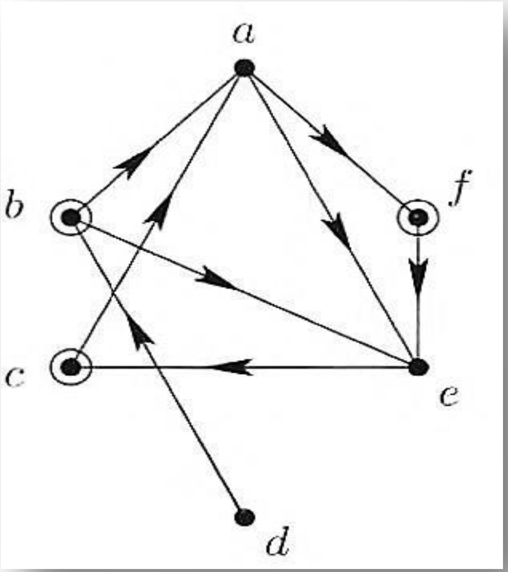
Notationsvereinbarung

- **$d(v)$** beschreibt den Grad einer Ecker **v**. (Anzahl der Kanten zu benachbarten Ecken)
  - Eine Ecke **v** in **S_n** hat also den Grad **$d(v) = 2n - 2$**.
- Später verwenden wir gerichtete Graphen in denen die Kanten Richtungen haben (**$e = (u, v)$**, Kante **e** mit Anfangsecke **u** und Endecke **v** (auch **$u \rightarrow v$**))
- **$d^+(v)$** beschreibt den Ausgangs- und **$d^-(v)$** den Eingangsgrad einer Ecke **v**.
  Somit gilt: **$d^+(v) + d^-(v) = d(v)$**.
- **$G_{A(c)}$** (mit **$A \subseteq V$**) bildet einen induzierten Untergraphen von **G** mit der Eckenmenge aus **A**, die alle **c** als Färbungsmöglichkeit haben.

Definitionen für den Beweis des ersten zweier Resultate

- Ein Kern $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{V}$ ist eine Teilmenge aller Ecken des Graphen $\mathbf{G}$, für die gilt:
  - (i) K ist unabhängig in G
  - (ii) für jede Ecke $u \notin K$ existiert eine Ecke $v \in K$ mit $u \to v$.

- Die Menge {b, c, f} stellt einen Kern dar.
  - b, c und f sind unabhängig
  - d → b
  - e → c
  - a → f



Lemma 1

„Sei **$G = (V,E)$** *ein gerichteter Graph, und für jede Ecke* **$v \in V$** *sei eine Farbmenge* **$C(v)$** *gegeben, die größer ist als der Aus-Grad (*$|C(v)| \geq d^+(v) + 1$*).*
Besitzt jeder induzierte Untergraph von **G** *einen Kern, so existiert eine Listenfärbung von* **G** *mit einer Farbe aus* **$C(v)$** *für jedes* **v**.“

Beweis 1 (Induktionsbeweis)

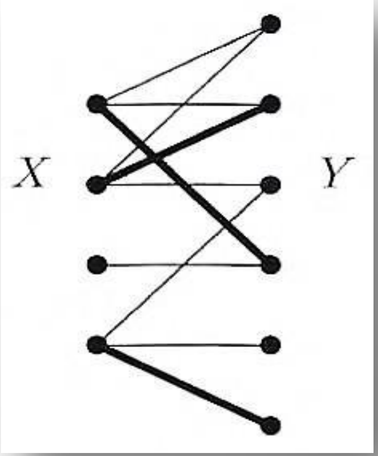
- Induktionsbeweis wird über $|\mathbf{V}| = \mathbf{n}$ geführt.
- **<u>Induktionsverankerung:</u>**
  Für den Fall $\mathbf{n = 1}$ muss nichts bewiesen werden.
  (für $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ wird $\mathbf{c} \in \mathbf{C(v)}$ gesetzt)
- **<u>Induktionsschluss(n -1 → n):</u>**
  - Durch Voraussetzung besitzt der induzierte Untergraph $\mathbf{G_{A(c)}}$ einen Kern $\mathbf{K(c)}$.
  - Alle $\mathbf{v} \in \mathbf{K(c)}$ werden mit der Farbe $\mathbf{c}$ gefärbt.
    (Entfernung von $\mathbf{K(c)}$ aus $\mathbf{G}$ und $\mathbf{c}$ aus $\mathbf{C}$)
  - Neuer Untergraph $\mathbf{G' = V \setminus K(c)}$ und $\mathbf{C'(v) = C(v) \setminus v}$
  - Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbf{A(c) \setminus K(c)}$ verringert sich der Aus-Grad $\mathbf{d^+(v)}$ um eins. $|\mathbf{C'(v)}| \geq \mathbf{d^+(v) + 1}$ in $\mathbf{G'}$ ist gültig!
  - Für $\mathbf{v} \notin \mathbf{A(c)}$ bleibt $\mathbf{C(v)}$ unverändert.
  - $\mathbf{G'}$ hat weniger Ecken als $\mathbf{G}$

Was muss jetzt noch bewiesen werden?

- Es gibt eine Ausrichtung des Graphen $\mathbf{S_n}$, für die gilt
  $\mathbf{n} \geq \mathbf{d^+(v) + 1} \Longleftrightarrow \mathbf{d^+(v)} \leq \mathbf{n - 1}$
  (für alle Aus-Grade)
- Existenz eines Kerns für alle induzierten Untergraphen

Definition für den Beweis des zweiten zweier Resultate (Matching)

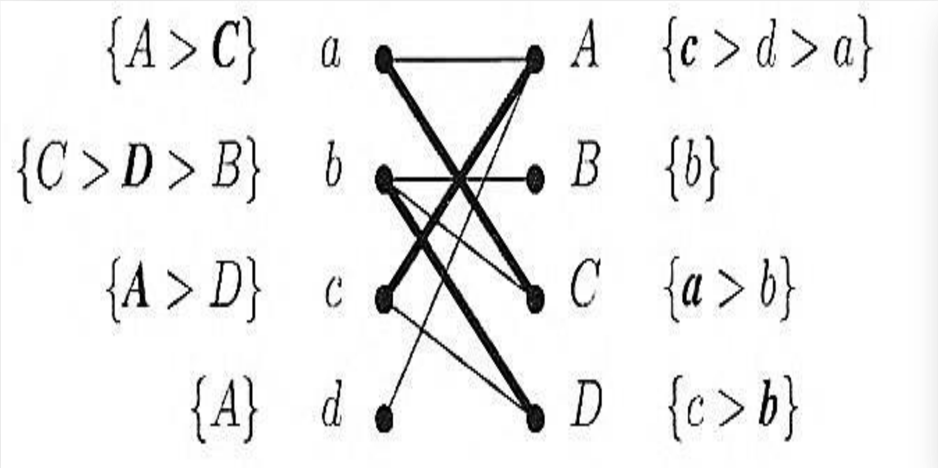
- Ein bipartiter Graph **G = (X ∪ Y, E)** hat die zwei Eckenmengen **X** und **Y** und jede Kante hat eine Endecke in jeweils einer der beiden Mengen. (Bipartite Graphen können also mit zwei Farben gefärbt werden.)
- Ein **Matching M** beschreibt die Situation, dass keine Kante in **G** die gleiche Endecke besitzt.

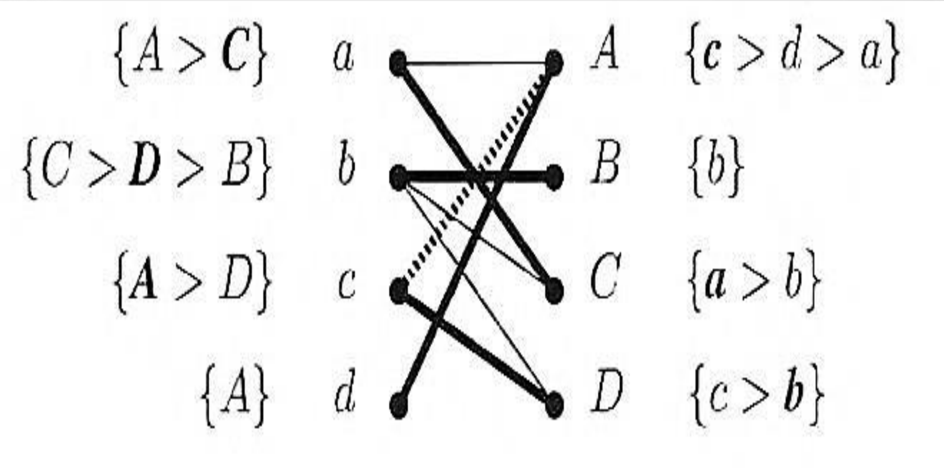


- Für das weitere Vorgehen werden für verschiedene Ecken unterschiedlich gewichtete Präferenzen eingeführt.
  $\mathbf{N(v) = \{z_1 > z_2 > \ldots > z_{d(v)}\}}$

Definition für den Beweis des zweiten zweier Resultate („stabiles Matching“)

- „Ein Matching M von **G = (X ∪ Y, E)** heißt stabil, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Wann immer **uv** ∈ **E\M** ist, **u** ∈ **X**, **v** ∈ **Y**, dann gilt entweder **uy** ∈ **M** mit **y** > **v** in **N(u)** oder **xv** ∈ **M** mit **x > u** in **N(v)**, oder beides.“





Algorithmus für Beweis 2

- Ausführung dieses Algorithmus:
  - Erster Schritt: Alle **u** ∈ **X** wählen ihr **v** ∈ **Y** mit höchster Priorisierung aus **N(u)**.
  - Wenn ein **v** ∈ **Y** öfter als einmal ausgewählt wird, wählt es das **u** mit der höchsten Priorisierung aus **N(v)** und nimmt es in die Zwischenauswahl. (Falls es nur einmal ausgewählt wird, wird das entsprechende **v** in die Zwischenauswahl gesetzt.)
  - Alle **u** ∈ **X**, die in keine Zwischenauswahl gesetzt worden sind, bilden die Untergruppe **K**.
  - Alle **u** ∈ **K** wählen ihr **v** ∈ **Y** mit zweit-höchster Priorisierung aus **N(u)**.
  - Jedes **v** ∈ **Y** vergleicht die neuen Auswahlen untereinander und mit der Zwischenauswahl, um das **u** mit höchster Priorisierung aus **N(v)** auszuwählen. Die anderen bilden erneut die Untergruppe **K**.
  - Sofern ein **u** ∈ **K** keine weitere Priorisierungen mehr besitzt, wird es aus der Untergruppe **K** entfernt.
  - Alle **u** ∈ **K** wählen ihr **v** ∈ **Y** mit **nächst**-höchster Priorisierung aus **N(u)**, solange bis die Untergruppe **K** leer ist und somit der Algorithmus stoppt.

Lemma 2

„Dieser Algorithmus findet immer das maximale stabile Matching.“

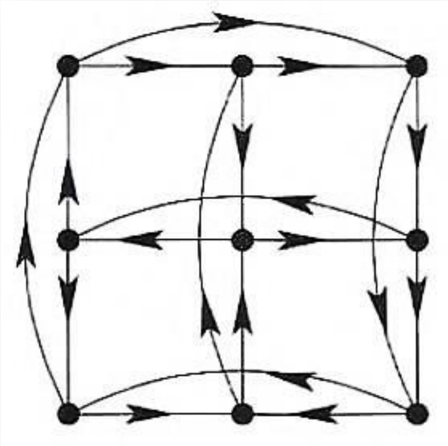
Beweis 2

- Behauptung: Am Ende des Algorithmus bilden alle **u** in den Zwischenauswahlen zusammen mit dem dazugehörigen **v** das maximale stabile Matching.
- Zwischenauswahl von **v** kann nur „besser“ werden, da nur ein **u** mit höherer Priorisierung **N(v)** ein anderes **u** ablösen kann.
- Wenn $\mathbf{uv} \in \mathbf{E}$, aber $\mathbf{uv} \notin \mathbf{M}$, gibt es zwei Möglichkeiten:
  - **u** hat **v** nie ausgewählt und somit gilt $\mathbf{uy} \in \mathbf{M}$ mit $\mathbf{y} > \mathbf{v}$ in **N(u)**
  - **u** hat **v** ausgewählt, wurde aber durch ein anderes **u** ersetzt und somit gilt $\mathbf{xv} \in \mathbf{M}$ mit $\mathbf{x} > \mathbf{u}$ in **N(v)**
- Das genau ist die Bedingung eines „**stabilen Matchings**“.

Kombination der beiden Resultate

- Weiterhin zu zeigen: $\chi_l(S_n) = n$.
- Die Kanten aus S_n müssen gerichtet werden ($S^G{}_n$), um zu zeigen, dass $d^+(v) \leq n - 1$ gilt.
(Die Ausrichtung der Kanten verändert nichts an den Färbungsmöglichkeiten: $\chi_l(S_n) = \chi_l(S^G{}_n)$)
- Die Ecken aus S_n werden mit (i, j) für $1 \leq i, j \leq n$ bezeichnet. ((i, j) und (r, s) sind benachbart, wenn $i = r$ oder $j = s$.)
- Um den Graphen zu richten, nehmen wir ein beliebiges Lateinisches Quadrat und nennen den Feldeintrag $L(i, j)$.
- Wir richten $(i, j) \to (i, j')$, wenn $L(i, j') > L(i, j)$ und $(i, j) \to (i', j)$, wenn $L(i,j) > L(i', j)$.

Kombination der beiden Resultate

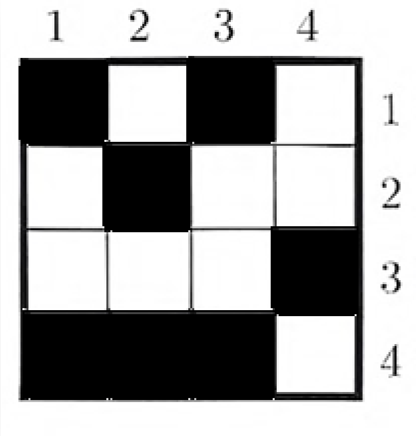


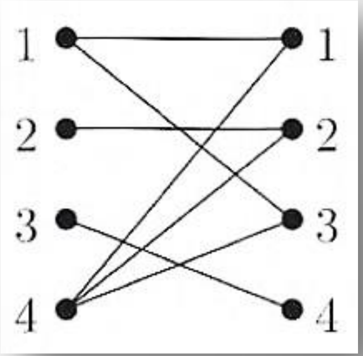
1	2	3
3	1	2
2	3	1

- Beispiel für S_3.
- Es gilt nun **$d^+(i,j) = n - 1$** für alle **(i, j)**.
- Wenn **$L(i, j) = k$**, dann haben **$n - k$** Felder in der Zeile einen größeren Feldeintrag und **$k - 1$** in der Spalte einen kleineren Feldeintrag.

Kombination der beiden Resultate

- Es bleibt nach Resultat 1 nur noch zu zeigen, dass jeder induzierte Untergraph einen Kern besitzt.
- Bildung eines bipartiten Graphen mit gegebenem **A ⊆ V**. Die Zeilen bilden die Menge **X** und die Spalten die Menge **Y**, sodass der Graph **G = (X ∪ Y,A)** entsteht.
- Jedes Element **(i, j)** ∈ **A** wird durch die Kante **ij** mit **i** ∈ **X** und **j** ∈ **Y** dargestellt.





Kombination der beiden Resultate

- Die Kantenrichtungen beschreiben die Priorisierungen in $\mathbf{G = (X \cup Y, A)}$:
  - $\mathbf{j' > j}$ in $\mathbf{N(i)}$, falls $\mathbf{(i, j) \rightarrow (i, j')}$ in $\mathbf{S^G_n}$
  - $\mathbf{i' > i}$ in $\mathbf{N(j)}$, falls $\mathbf{(i, j) \rightarrow (i', j)}$ in $\mathbf{S^G_n}$
- Nach dem zweiten Resultat besitzt genau so ein Graph ein stabiles Matching.
- <u>Dieses $\mathbf{M \subseteq A}$ bildet den gesuchten Kern:</u>
  - $\mathbf{M}$ ist in $\mathbf{A}$ unabhängig, da kein $\mathbf{i}$ oder $\mathbf{j}$ in den Kanten von $\mathbf{M}$ in $\mathbf{G}$ mehrmals als Endecke vorkommen darf
  - Falls $\mathbf{(i, j) \in A \setminus M}$, dann gilt entweder $\mathbf{(i, j') \in M}$ mit $\mathbf{j' > j}$ ($\mathbf{in\ S^G_n\ (i, j) \rightarrow (i, j')}$) oder $\mathbf{(i', j) \in M}$ mit $\mathbf{i' > i}$ ($\mathbf{in\ S^G_n\ (i, j) \rightarrow (i', j)}$)
- **Der Beweis ist an dieser Stelle vollständig!**

Fazit

- Jeff Dinitz stellte das Problem im Jahr 1978 auf.
- Fred Galvin lieferte die Lösung des Problems durch Kombination der beiden zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Resultate im Jahr 1995.
- Problem hat eher wenig Praxisrelevanz
- Färbungsprobleme stellen die Hauptprobleme der Graphentheoretiker dar und sind weiterhin beliebt unter ihnen.

Quellen

- Das Buch der Beweise,
  Martin Aigner und Günter M. Ziegler