Vier Anwendungen des Schubfachprinzips

von Jonatan Spincke

Einleitung:

Dieses Dokument ist die schriftliche Ausarbeitung zu meinem bereits gehaltenen Seminarvortrag, in welchem drei Anwendungsfälle des Schubfachprinzips und eine Anwendung des doppelten Abzählens thematisiert und vorgestellt wurden. In Anlehnung an meine Präsentation ergibt sich für die Ausarbeitung folgende Gliederung:

1. Allgemeine Informationen und Beschreibung des Schubfachprinzips
2. Beweisführung
3. Alltägliche Anwendungsbeispiele
    a. Haare auf dem Kopf
    b. Gleicher Geburtsmonat
    c. Gleichfarbiges Sockenpaar aus Sockenkiste
4. Mathematische Anwendungsbeispiele
    a. Zahlen
    b. Folgen
    c. Summen
    d. Nochmals Zahlen
5. Quellen

Allgemeine Informationen und Beschreibung des Schubfachprinzips:

Das Schubfachprinzip ist in der Mathematik eine einfache, intuitive und oftmals hilfreiche Methode, um gewisse Aussagen über endliche Mengen machen zu können.

Es wird ebenfalls „Taubenschlagprinzip“ (engl. pigeonhole principle) aber auch Dirichletsches Schubfachprinzip genannt, da es wahrscheinlich auf den deutschen Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet aus dem 19. Jahrhundert zurückgeht.

Das Prinzip besagt, dass es, wenn **n Objekte** auf **m Mengen** verteilt werden und **n** echt größer **m** ist, mindestens eine Menge gibt, in der mehr als ein Objekt landet.

Diese Aussage lässt sich verallgemeinert so ausdrücken:

Wenn **n Objekte** auf **m Mengen** verteilt werden, dann gibt es mindestens eine Menge, in der $\left\lceil \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}} \right\rceil$ **Objekte** landen.

Beweisführung

Die Beweisführung zum Schubfachprinzip lässt sich einfach und elegant auf ***indirekte Weise*** *führen:*

Falls das Prinzip nicht stimmt, würde in jeder Menge (jedem „Schubfach“) höchstens ein Objekt landen. Das wiederum würde bedeuten, dass es höchstens genauso viele Objekte wie Mengen (Schubfächer) gibt. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Menge der Objekte echt größer als die Menge der Schubfächer ist.

Damit ist bewiesen, dass die Behauptung des Schubfachprinzips richtig sein muss!

Alltägliche Anwendungsbeispiele:

Um ein besseres Verständnis für das Schubfachprinzip an sich und seine Anwendungsmöglichkeiten herzustellen, habe ich zunächst drei alltagstaugliche und hoffentlich anschauliche Beispiele zusammengetragen.

Haare auf dem Kopf:

Die Anzahl der Haare auf dem Kopf eines Menschen liegt in der Regel zwischen 100.000 – 200.000. Nehmen wir zur Sicherheit an, dass sie maximal eine Million groß ist. In einer Großstadt wie Hamburg mit einer Einwohnerzahl von ca. 1,8 Millionen haben also mindestens zwei Menschen die exakt gleiche Anzahl von Haaren auf dem Kopf.

Gleicher Geburtsmonat:

Betrachten wir nun einmal den Geburtsmonat einer Person. Mit zwölf Teilnehmern plus Herrn Iwanowski kommen wir auf dreizehn Personen in unserem Seminar. Es lässt sich also sagen, dass mindestens zwei Personen unserer Gruppe im selben Monat Geburtstag haben müssen.

Gleichfarbiges Sockenpaar aus Sockenkiste:

Als letztes Beispiel nehmen wir einen Behälter mit lauter einzelnen Socken. Es gibt jedoch nur schwarze oder weiße Socken. Um sicher ein gleichfarbiges Paar zu erhalten, muss man lediglich drei Socken aus dem Behälter ziehen.

Nehmen wir nun an, dass sich in dem Behälter vier schwarze und vier weiße Socken befinden. Moechte man nun garantiert ein weißes Sockenpaar benutzen, so muss man schon sechs Mal hineingreifen.

Mathematische Anwendungsbeispiele:

Im „Buch der Beweise“ von Martin Aigner und Günter M. Ziegler beschäftigt sich das Kapitel 27 mit dem Schubfachprinzip und dem doppelten Abzählen. Sechs Anwendungsfälle werden dort aufgeführt und beschrieben. Wie der Titel der Ausarbeitung erahnen lässt, habe ich vier dieser Fälle gewählt und werde sie in den folgenden Abschnitten erläutern.

Zahlen:

I Erste Behauptung:

In unserem ersten Anwendungsfall betrachten wir die Zahlen **1, 2, 3, … , 2n** und wählen beliebige **n+1** Zahlenelemente von ihnen aus.

Die erste Behauptung ist, dass es unter diesen **n+1** ausgewählten Zahlen immer mindestens zwei gibt, die keinen gemeinsamen Teiler haben.

II Erste Beweisführung:

Da wir **n+1 Elemente** entnehmen müssen und die Gesamtmenge **2n** groß ist, folgt daraus, dass wir eine Zahl mehr als die **Hälfte n** herausnehmen müssen.

Dies wiederum bedeutet ganz einfach, dass mindestens zwei Zahlen nebeneinander liegen müssen, da wir nur bis zur Hälfte einer Zahlenmenge die Elemente so wählen könnten, dass eben keine Zahl direkt neben einer anderen liegt.

Zwei Zahlen, welche nebeneinander liegen, sich also nur um 1 unterscheiden, sind immer relativ prim zueinander.

Zahlen, welche relativ prim zueinander sind, haben per Definition keine gemeinsamen Teiler.

III Erstes Beispiel:

Für ein anschauliches Beispiel wählen wir n=6.

Das bedeutet unsere Grundmenge umfasst folgende Zahlen:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Wir versuchen nun solche Elemente zu wählen, die auf jeden Fall gemeinsame Teiler haben. Es liegt deshalb nahe, auf jeden Fall alle geraden Zahlen zu nehmen, weil diese alle die 2 als gemeinsamen Teiler besitzen. Nun müssen wir jedoch eine weitere Zahl hinzunehmen und dort liegt das in der Beweisführung beschriebene Problem. Jede weitere Zahl wird direkt neben einer bereits gewählten Zahl liegen und keinen gemeinsamen Teiler mit ihr haben (bis auf den Teiler 1, welcher aber nicht zählt).

Beispielhaft habe ich folgende **n+1 Zahlen** gewählt:

{2, 3, 4, 6, 8, 10, 12}

In dieser Menge hat die 3 mit der 2, der 4, der 8 und der 10 keinen gemeinsamen Teiler.

IV Zweite Behauptung:

Wir arbeiten noch einmal mit den Zahlen **1, 2, 3, … , 2n** und wählen erneut beliebige **n+1** Zahlenelemente von ihnen aus.

Für diese Konstellation gilt ebenfalls, dass es immer zwei Zahlen in der ausgewählten Menge gibt, so dass die eine die andere teilt.

V Zweite Beweisführung:

(1) Um zu prüfen, ob eine Zahl Teiler einer anderen Zahl ist, lässt sich gut die Primzahlzerlegung verwenden. Bei dieser werden alle 2en, also der gerade Faktor einer Zahl, nach vorne gezogen, wodurch nur noch ein ungerader Anteil übrig bleibt. Jede Zahl wird also folgendermaßen ausgedrückt: $\mathbf{2^k * m}$
Wobei **k** eine ganze Zahl und **m**, wie bereits beschrieben, eine ungerade ganze Zahl ist

(2) Auf diese Weise kommt das Schubfachprinzip zum Tragen. In der **Menge 2n** gibt es **n ungerade Zahlen**, die als **m** infrage kommen würden. Nun ziehen wir aber **n+1 Elemente** heraus, was bedeutet, dass zwei Zahlen denselben **m-Anteil** besitzen werden.

(3) Dass zwei Zahlen, welche denselben ungeraden Anteil bei der Primzahlzerlegung haben, einander teilen, lässt sich zeigen, indem wir diese beiden als Ausdruck aufschreiben. Es seien **a** und **b** die beiden ganzen Zahlen mit demselben **m-Anteil** und **k** und **x** beliebige ganze, positive Zahlen:

$\mathbf{a = 2^k * m}$
$\mathbf{b = 2^x * m}$

In diesem kleinen Gleichungssystem lässt sich zunächst der m-Anteil bequem rauskürzen und es bleiben zwei 2er-Potenzen übrig:

$\mathbf{a = 2^k}$
$\mathbf{b = 2^x}$

Machen wir nun eine Fallunterscheidung bezüglich der Exponenten:

- Wenn **k > x**, dann lässt sich a durch b teilen

- Wenn **k < x**, dann lässt sich b durch a teilen
- Wenn **k = x**, dann sind auch a und b gleich und teilen sich somit gegenseitig

VI Zweites Beispiel:

Wir nehmen wieder dieselbe Ausgangsmenge wie im ersten Beispiel mit n=6.

Also ist unsere Grundmenge wieder:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Um alle möglichen ungeraden Anteile bezüglich der Primzahlzerlegung zu erhalten, wählen wir vor allem ungerade Zahlen. Doch auch bei folgender Menge lassen sich zwei Zahlen finden, die einen gemeinsamen m-Anteil haben und bei der deshalb eine Zahl eine andere teilt.

{4, 5, 6, 7, 9, 11, 12}

Wenn wir die Zahlen mittels Primzahlzerlegung aufschreiben, zeigt sich auch, dass die 6 und die 12 beide die 3 als ungeraden Anteil haben. Wie wir wissen, ist die 6 ein Teiler der 12.

$4 = 2^2 * 1$
$5 = 2^0 * 5$
$6 = 2^1 * 3$
$7 = 2^0 * 7$
$9 = 2^0 * 9$
$11 = 2^0 * 11$
$12 = 2^2 * 3$

Folgen:

I Behauptung:

Im zweiten Anwendungsfall geht es um Folgen. Für die Behauptung, welche bewiesen werden soll, sei eine Folge von **mn+1 verschiedenen Zahlen** gegeben. In so einer Folge wird sich immer eine ***ansteigende*** Teilfolge der **Länge m+1** oder eine ***absteigende*** Teilfolge der **Länge n+1** oder sogar beide Arten von Teilfolgen finden lassen.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{mn+1}$

II Beweisführung:

(1) Wir beginnen damit, alle Elemente unserer Folge (bezeichnet mit $\mathbf{a_i}$) auf eine ganze Zahl (von nun ab $\mathbf{t_i}$ genannt), welche die Länge der längstmöglichen aufsteigenden, ab dem Element selbst beginnende, Teilfolge angibt, abzubilden:
f: $\mathbf{a_i \rightarrow t_i}$

(2) Falls nun ein $\mathbf{a_i}$ auf ein $\mathbf{t_i}$ abgebildet würde, welches größer oder gleich **m+1** wäre, würde dies ja bedeuten, dass wir bereits eine aufsteigende Teilfolge gefunden hätten, welche die Ausgangsthese erfülle. Da wir dies aber verhindern wollen, um zu versuchen, die Behauptung zu widerlegen, legen wir fest, dass jedes $\mathbf{t_i}$ maximal **m** groß sein darf. Wir ordnen die Folge also so, dass ein $\mathbf{a_i}$ höchstens eine aufsteigende Teilfolge der **Länge m** nach sich zieht.

(3) Wenn wir uns nach Durchführung der Abbildung die Mächtigkeit von $\mathbf{a_i}$ und $\mathbf{t_i}$ anschauen, erkennen wir mit dem mithilfe unseres Wissens durch das Schubfachprinzips, dass es mindestens ein $\mathbf{t_i}$ geben muss, auf welches **n+1** Elemente aus $\mathbf{a_i}$ abgebildet sind:

$$\left\lceil \frac{|\boldsymbol{a_i}|}{|\boldsymbol{t_i}|} \right\rceil = \left\lceil \frac{\mathbf{mn+1}}{\mathbf{m}} \right\rceil = \boldsymbol{n+1}$$

Da wir diese $\mathbf{t_i}$ nun genauer betrachten wollen, bezeichnen wir es ab diesem Zeitpunkt als **s.**

Wir wissen jetzt, dass es mindestens **n+1** aufsteigende Teilfolgen der gleichen maximalen **Länge s** in unserer Gesamtfolge gibt.

(4) Als nächstes betrachten wir die Startpunkte dieser Teilfolgen. Um zu kennzeichnen, dass diese aus der Gesamtfolge stammen, aber es nur ausgewählte sind, bekommen sie einen weiteren **Index j**. An der Reihenfolge der Zahlen darf natürlich nichts geändert werden:

$a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \ldots , a_{jn+1}$

Wir stellen fest, dass ein Element immer größer als sein Nachfolger sein muss, da die von dort beginnende aufsteigende Teilfolge sonst nicht die **Länge s**, sondern **s+1** hätte. Dies kann aber natürlich nicht sein, da wir die Elemente gerade aufgrund ihrer Eigenschaft ausgewählt haben, dass die von dort beginnenden aufsteigenden Teilfolgen alle dieselbe **Länge s** haben. Es folgt also:

$a_{j1} > a_{j2} > a_{j3} > \ldots > a_{jn+1}$

Wir haben eine ***absteigende*** Teilfolge der **Länge n+1**

(5) Dadurch, dass wir mit unseren Vorkehrungen sichergestellt haben, dass keine aufsteigende Teilfolge der **Länge m+1** oder größer entsteht, konnten wir nicht verhindern, dass eine absteigende Teilfolge der **Länge n+1** entsteht. Selbstverständlich hätten wir die Beweisführung auch genau andersherum führen und damit beginnen können, dass es in keinem Fall eine absteigende Teilfolge gibt, welche die vorgegebene Bedingung erfüllt.

Damit ist bewiesen, dass die Ausgangsbehauptung stimmt und in einer Folge von **mn+1 Elementen** immer mindestens eine ***aufsteigende*** Teilfolge der **Länge m+1** oder eine ***absteigende*** Teilfolge der **Länge n+1** besteht oder sogar ***beides*** existiert.

III Beispiel:

Um eine übersichtliches Beispiel zu erhalten, habe ich zur Veranschaulichung für die Folgen-These **m=3** und **n=3** gewählt. Daraus ergibt sich als Länge der Gesamtfolge **mn+1 = 10**.

Des Weiteren habe ich der Einfachheit halber für die Elemente der Folge die ganzen **Zahlen 1 bis 10** gewählt und versucht so zu ordnen, dass die Ausgangsbehauptung minimal erfüllt wird bzw. solange wie möglich unerfüllt bleibt:

8 9 10 2 1 6 7 4 5 3

In dieser angegeben Anordnung wird sich keine ansteigende Teilfolge finden lassen, welche die **Länge m+1** oder größer besitzt.

Zudem entstehen auch erst durch das letzte Element, die Zahl „3“, einige absteigende Teilfolgen, welche die **Länge n+1** besitzen. Dies zeigt, dass die Folgen-These vom Anfang wirklich nur gilt, wenn die **Länge der Gesamtfolge mindestens mn+1** beträgt.

Summen:

I Behauptung:

Ein weiterer Anwendungsfall beschäftigt sich mit Summen. Gegeben sind **n ganze** Zahlen, die nicht verschieden sein müssen, jedoch der Größe nach geordnet aufsteigend sortiert sind. Es wird nun behauptet, dass es immer einen Abschnitt von aufeinanderfolgenden Zahlen gibt, deren Summe ein **Vielfaches von n** ist.

II Beweisführung:

(1) Im ersten Schritt bilden wir zwei Klassen, **N** und **R**. In **N** befinden sich alle Summen, die beginnend vom ersten Element unserer gegeben Zahlen (ab jetzt als a_1 bezeichnet) gebildet werden können. In **R** wiederum befinden sich alle möglichen Reste, die es bei einer Division durch **n** geben kann, außer dem Rest 0. N und R sehen also nun so aus:

N = {a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, … , $a_1 + … a_n$}

R= {1, 2, … , n – 1}

(2) Als nächstes wird eine Abbildung von **N -> R** erstellt mittels der **Funktion f(m)**. Diese Funktion gibt den Rest wieder, welcher bei der Division von einer **natürlichen Zahl m** durch unser gewähltes **n** entsteht. Jetzt setzen wir nacheinander alle vorhandenen Elemente aus **N**, also unsere gebildeten Summen, in die Funktion ein. Wir gehen davon aus, dass alle eingesetzten Elemente einen Rest zwischen **1** und **n-1** erzeugt haben und keine ohne Rest durch **n** teilbar sind, da wir sonst bereits eine Summe gefunden hätten, welche die Ausgangsbehauptung erfüllen würde. Dies wollen wir jedoch vermeiden, da wir versuchen, die Behauptung zu widerlegen.

(3) Wenn wir uns nun die Mächtigkeit der beiden Klassen **N** und **R** anschauen, fällt auf, dass **N** um eins größer als **R** ist:

|N| = n
|R| = n-1

Dank des Schubfachprinzips wissen wir, dass mindestens zwei Summen denselben Rest haben müssen, da **|N| > |R|** ist.

(4) Wir nehmen nun also zwei Summen mit gleichem Rest und subtrahieren die kleinere Summe von der größeren:

$$\sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{k=1}^{k} a_i = \sum_{k+1}^{l} a_i$$

Dadurch, dass wir zwei Zahlen aus derselben Resteklasse voneinander subtrahieren, erhalten wir eine Zahl, welche bei der Division durch **n** nun keinen Rest mehr erzeugt (also ein **Vielfaches von n** ist) und aus aufeinanderfolgenden Elementen aus **N** per Addition gebildet wird.

Unsere Ausgangsbehauptung hat sich also als wahr erwiesen!

III Beispiel:

Im folgenden Beispiel zur Beweisführung habe ich n=7 und die ganzen Zahlen 3, 5, 10, 12, 17, 17, 19 gewählt.

Daraus ergibt sich für die beiden Klassen N und R:

N = {3, 8, 18, 30, 47, 64, 83}
R = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

|N| = 7
|R| = 6

Wenn wir die Elemente von N in die Funktion f(m) einsetzen, ergeben sich folgende Reste:

f(3) = 3
f(8) = 1
f(18) = 4
f(30) = 2
f(47) = 5
f(64) = 1
f(83) = 6

Da die Summen 64 und 8 den gleichen Rest 1 haben, wählen wir diese und subtrahieren die zweitgenannten von der ersteren:

64 – 8 = 56

56 ist bekanntlich ohne Rest durch 7 teilbar:

56 : 7 = 8

Zum Schluss muss natürlich noch gezeigt werden, dass sich die 56 auch aus aufeinanderfolgenden Elementen von unseren gewählten Zahlen zusammensetzt:

10 + 12 + 17 +17 = 56

Nochmals Zahlen:

I Behauptung:

Im letzten Anwendungsfall kommt nicht mehr das Schubfachprinzip zum Einsatz. Stattdessen werden wir eine Vermutung bzw. Behauptung mittels doppeltem Abzählen beweisen. Betrachtet wird der Zahlenraum der ganzen Zahlen von **1 bis n**. Zuerst schauen wir auf die Anzahl der Teiler für ein bestimmtes **n.** Dazu nutzen wir die Funktion **t(n)**, welche genau dies wiedergibt. Nun wollen wir wissen, wie groß **t(n)** im Durchschnitt ist. Dazu nehmen wir im nächsten Schritt die Funktion **ṫ(n)** zur Hilfe, welche die Anzahl der Teiler für die Zahlen **1 bis n** summiert und durch **n** teilt:

$$\dot{t}(\mathbf{n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j)$$

Nun versuchen wir dieses **ṫ(n)** für ein beliebiges **n** abzuschätzen. Dies erscheint aber sehr schwer, da die Anzahl der Teiler für verschiedene Zahlen auch sehr unterschiedlich ausfällt. So hat zum Beispiel jede **Primzahl p** immer nur **2 Teiler**, während Zahlen, welche sich durch $\mathbf{2^k}$ (**k** sei eine positive, ganze Zahl) darstellen lassen, eine sehr große Anzahl von Teiler haben können:

t(p) = 2
$t(2^k) = k + 1$

Diese Beobachtung könnte nahe legen, dass eine Abschätzung nicht möglich ist, da die Anzahl der Teiler zu unregelmäßig ist. Doch diese Vermutung werden wir entkräften, indem wir nachweisen, dass **ṫ(n)** eine eingrenzbare Funktion ist.

II Beweisführung:

Um die Annahme, dass **ṫ(n)** für ein beliebiges **n** ungefähr voraussagbar bzw. eingrenzbar ist, zu belegen, werden wir uns die Herangehensweise des doppelten Abzählens zur Nutze machen.

Zur Veranschaulichung der Systematik wählen wir für unseren Zahlenraum unser **n=8** und schreiben uns die ersten acht Zahlen in eine Hilfstabelle. In dieser lassen sich die Teiler einer Zahl spaltenweise ablesen. Eine „1" in einem Feld bedeutet für die Zahl, in deren Spalte wir uns befinden, dass die Zahl in der dazugehörigen Zeile sie teilt. Die Gesamtheit aller Einsen in einer Spalte gibt also die Anzahl der Teiler der betrachteten Zahl wieder.

		Vielfache							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Teiler	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
	2		1		1		1		1
	3			1			1		
	4				1				1
	5					1			
	6						1		
	7							1	
	8								1

Ausgehend von dieser Betrachtungsweise können wir erkennen, dass die Anzahl der Teiler bisher spaltenweise ermittelt wurde. Da dies aber, wie bereits festgestellt, nicht sehr effektiv ist, soll jetzt zeilenweise gezählt werden. Für die Zahl in deren Zeile wir uns befinden, bedeutet jede „1“ in einem Feld, dass die dazugehörige Zahl der Spalte ein Vielfaches von ihr ist. Um die Anzahl der Vielfacheren für eine Zahl zu ermitteln, müssen also nur die Einsen in ihrer Zeile zusammen gezählt werden. Dies ermöglicht, unsere Ausgangsfunktion für **$\dot{t}$(n)** etwas umzustellen:

$$\dot{t}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{j}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}} \right\rfloor$$

Die **Variabel i** steht hierbei für die jeweilige Zeile. In der Gleichung ist die untere Treppenfunktion nötig, da selbstverständlich nur eine ganze Zahl für die Anzahl der Vielfachen einer Zahl erlaubt ist, aber bei der Division von $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}}$ Kommazahlen als Ergebnis möglich wären und wir fälschlicherweise eine höhere Anzahl von Teiler erhalten würden, als es tatsächlich gibt.

Genau diese Treppenfunktion lassen wir nun aber im nächsten Schritt wegfallen, damit sich die **beiden n** in der Gleichung herauskürzen lassen. Diese weitere Umformung wäre sonst nicht erlaubt:

$$\dot{t}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{j}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}} \right\rfloor \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}}$$

Nach der erneuten Umformung können wir erkennen, dass unsere Gleichung wie eine bekannte Funktion aussieht: Die **harmonische Zahl H_n**. In ihrer jetzigen Form werden einfach die **Kehrwerte** der Zahlen **1 bis n** aufsummiert, genau wie es die **harmonische Zahl** tut.

Durch das Weglassen der unteren Treppenfunktion ist selbstverständlich ein Fehler im Summanden entstanden, der jedoch in jedem Fall kleiner als 1 ist (also nicht besonders groß). Das bedeutet, dass der Gesamtfehler der Funktion auch kleiner als 1 sein muss.

Diese beiden Gewissheiten lassen uns jetzt unsere Durchschnittsfunktion **$\dot{t}$(n)** das erste Mal von beiden Seiten eingrenzen:

$$\mathrm{H_n} - 1 < \dot{t}(\mathrm{n}) \leq \mathrm{H_n}$$

Nun benutzen wir im nächsten Schritt bereits vorgegebene Abschätzungen durch Integrale (Buch der Beweise, Seite 13), wodurch sich wiederum die Harmonische Zahl folgendermaßen eingrenzen lässt:

$$\mathbf{\log n + \frac{1}{n} < H_n} < \log n + 1$$

Diese Eingrenzungen verbinden wir mit unserem bereits erarbeiteten Wissen über **ṫ(n)** und erhalten beim Einsetzen folgende, abschließende Gleichung:

$$\mathbf{\log n - 1 < H_n - 1 - \frac{1}{n} < \dot{t}(n) \leq H_n < \log n + 1}$$

Die von uns betrachtete Durchschnittsfunktion **ṫ(n)** ist wie bereits vermutet nicht total unregelmäßig, sondern von oben und unten eingrenzbar, da sie um **weniger als 1** um **log n** schwankt.

<u>Quellen:</u>

- Wikipedia [https://de.wikipedia.org/wiki/Schubfachprinzip, *vom 03.12.2016*]
- Uni Rostock [http://rho.math.uni-rostock.de/SemSkripte/Schubfachprinzip_Strauss.pdf, *vom 28.11.2016*]
- Das Buch der Beweise (4. Auflage) von Martin Aigner und Günter M. Ziegler