Fachhochschule Wedel

-University of Applied Sciences-

Seminarausarbeitung

in der Fachrichtung
Wirtschaftsinformatik

Thema:

Irrationalität einer Zahl

Seminarleiter
Prof. Dr. Sebastian Iwanowski
Fachhochschule Wedel

Verfasser
Arif Özütemiz

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

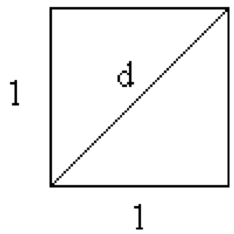
1

Einleitung

1.1 Motivation

Mit der Entdeckung der irrationalen Zahlen im 5.Jahrhundert vor Chr. haben einige Mathematiker somit die Irrationalität dieser Zahlen bewiesen. Nichtsdestotrotz gibt es heute noch Zahlen deren Irrationalität noch nicht bewiesen wurde, aber vermutet wird.

Das gängigste Beispiel ist das Berechnen der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge eins.



$$d = \sqrt{2}$$

Abbildung: Quadrat

Die irrationalen Zahlen gehören den reellen Zahlen an. Diese Zahlen haben aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften eine gesonderte Stellung in der Menge der reellen Zahlen.

Die irrationalen Zahlen sind nicht als Bruch darstellbar, die Dezimaldarstellung ist nicht periodisch und bricht nicht ab. Weiter ist zu unterscheiden, dass diese Zahlen in die zwei Typen algebraische und transzendente Zahlen untergliedert werden können. Einige Beispiele sind die Quadratwurzel (algebraische Zahl), die Eulersche Zahl und die Kreiszahl Pi (transzendente Zahlen).

1.2 Aufbau der Ausarbeitung

In dieser Seminarausarbeitung werde ich zwei Zahlen - die Eulersche Zahl und die Kreiszahl Pi - auf ihre Irrationalität beweisen. Beim Beweisen dieser Zahlen werde ich mich nach einer bestimmten Vorgehensweise orientieren. Der Beweis zu der Eulerschen Zahl wird detailliert erläutert, wobei es in ein kurzen und langen Beweis untergliedert ist. Der Beweis für Pi wird dabei nur grundlegend erläutert. Abschließen werde ich mit einem Resümee.

2

Vorgehensweise beim Beweisen

Die ausschlaggebende Eigenschaft beim Beweisen der Irrationalität ist die Tatsache, dass eine irrationale Zahl nicht als Bruch dargestellt werden kann. Man trifft zunächst die Annahme, die zu beweisende Zahl sei rational, so dass es als Bruch dargestellt werden kann. Durch weitere Annahmen und Umformungen der Gleichung(en), ergibt sich ein Widerspruch.

Zusammenfassend werden folgende Schritte berücksichtigt und abgearbeitet:

- Es wird jedes Mal der indirekte Beweis angewendet.
- Hierbei wird angenommen, dass die zu beweisende Zahl eine rationale Zahl sei.

  D.h., dass die Zahl als Bruch dargestellt werden kann $a = \frac{b}{c}$
- Zum Schluss wird ein Widerspruch erzeugt.

3

Beweis zu e[1]

3.1 Voraussetzungen

Wie schon in Kapitel 2 erläutert wird zuerst die Annahme getroffen, die Zahl e[1] sei rational.

$$e = \frac{p}{q}$$

Weiter ist folgendes anzunehmen:

$$p, q \in \mathbb{N}, teilerfremd\ und\ 2 < e < 3\ mit q \geqq 2$$

Die Eulersche Zahl muss daher zwischen zwei und drei liegen.

Eine Annäherung an die Eulersche Zahl ist mit der sogenannten Reihendarstellung möglich.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots$$

Zu sehen ist eine Summe, wobei alle Summanden bis auf den ersten immer nach dem gleichen Schema aufgebaut sind. Der Wert im Nenner kann für die weiteren Summanden theoretisch bis ins Unendliche konvergieren, sodass der Wert der Eulerschen Zahl präziser bestimmt werden kann.

3.2 Äquivalenzumformung

Das Ziel ist es zum Schluss ein Widerspruch zu erzeugen. Hierfür wird die eben erwähnte Reihendarstellung genutzt. Auf beiden Seiten der Gleichung wird mit q! multipliziert und man erhält folgende Gleichung:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \mid \cdot q!$$

$$\Longleftrightarrow q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots$$

3.3 Betrachtung der linken und rechten Seite der Gleichung

Um ein Widerspruch zu erzeugen, darf diese Gleichung nicht stimmen. Sprich die Werte auf der linken und rechten Seite dürfen nicht gleich sein.

3.3.1 Betrachtung der linken Seite der Gleichung

$$q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p \quad \in \mathbb{N}$$

Für die linke Seite der Gleichung ist q!e zu betrachten. Aufgrund der Annahme zu Beginn kann man e auch als Bruch darstellen. Mit dem Kürzen von q im Nenner ergibt sich für die Fakultät (q-1)!. Aus Abschnitt 3.1 kann sicher schlussgefolgert werden, dass die Zahl ein Element der natürlichen Zahlen sein muss. Denn eine natürliche Zahl multipliziert mit einer natürlichen Zahl ergibt selbstverständlich eine natürliche Zahl.

3.3.2 Betrachtung der rechten Seite der Gleichung

Bei dieser Betrachtung wird nochmals eine Aufteilung vorgenommen. Und zwar wird die Summe in die zwei Summenwerte S und T aufgeteilt.

$$\underbrace{q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!}}_{S} + \underbrace{\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!}}_{T} + \ldots$$

3.3.2.1 Betrachtung des Summenwertes S

Der Summenwert S besteht ausschließlich aus natürlichen Zahlen. Denn es besteht aus der natürlichen Zahl q und den Zahlen zwischen 1 bis q. Alle Nenner von 1! bis q! sind Teiler des Zählers q!, sodass der Wert S auch eine natürliche Zahl sein muss.

3.3.2.2 Betrachtung des Summenwertes T

Der Summenwert T enthält bei den Summanden im Nenner folgende Struktur: (q + 1)!, (q + 2)! usw. D.h., dass die Nenner ins Unendliche konvergieren, sodass es sich einem bestimmten Wert annähert. Dieser Wert wird im Weiteren mit der geometrischen Reihe bestimmt.

Wenn nun die Reihe genauer betrachtet wird, ist zu erkennen, dass die Fakultät im Nenner stets größer ist als der Zähler. Daher wird q! immer zu dem Wert 1 gekürzt. In 3.1 ist festgelegt worden, dass q >= 2 sein muss. Dieser Wert wird eingesetzt.

$$T = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \mid mit q \geqq 2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

Mit der Anwendung der geometrischen Reihe wird eine Abschätzung nach oben bzgl. des Wertes von T gemacht. Damit ist sichergestellt, dass man sich dem Summenwert T genauer annähert.

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

In jedem Summanden ist der Wert 1/3 enthalten. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt und eine geometrische Reihe gebildet, die größer ist als T.

$$T < \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Für die Berechnung wird die allgemeine Formel für die geometrische Reihe angewendet.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a \cdot q^k = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \mid mit\ q = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{3}$$

Beim Einsetzen der Werte ergibt sich folgendes:

$$T < \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Es ist klar festzustellen, dass T zwischen 0 und 0.5 liegen muss und somit keine natürliche Zahl ist.

$$T \notin \mathbb{N}$$

3.4 Widerspruch erzeugen

Aus 3.3 ist folgende Gleichung hervorgekommen:

$$\underline{q!e} = \underline{S} + \underline{T}$$

$$\in \mathbb{N} \quad \in \mathbb{N} \quad \notin \mathbb{N}$$

Da die linke und rechte Seite der Gleichung nicht aus den selben Zahlenmengen sind, erhält man ein Widerspruch. D.h., dass die Annahme, die Zahl e^{1} sei rational, widerlegt ist. Die Zahl e^{1} ist somit irrational.

4

Beweis zu e^r

4.1 Kurzer Beweis zu e^r

Zu beweisen ist folgendes: $e^r\ ist\ f\text{ür}\ alle\ r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ irrational.$

Die Voraussetzungen hierfür sind folgende:

$$Sei\ r = \frac{s}{t}\ mit\ s \in \mathbb{N}\ und\ t \in \mathbb{Z}$$

Die Annahme lautet: e^r sei rational.

Durch das Einsetzten von r aus der Voraussetzung und Umformungen erhält man:

$$Dann\ gilt: e^{\frac{s}{t}} = \frac{p}{q}$$

$$\iff (e^{\frac{s}{t}})^t = \frac{p^t}{q^t}$$

$$\iff e^s = \frac{p^t}{q^t}$$

Somit ist sichergestellt, dass man nur e^s beweisen muss.

Denn es gilt: Wenn $e^{\frac{s}{t}}$ rational wäre, dann wäre auch e^s rational.

4.2 Langer Beweis zu e^r

Für den langen Beweis werden einige Voraussetzungen benötigt. Um einen roten Pfaden zu haben, ist es sinnvoll den Beweisablauf einmal konkret zu erwähnen.

4.2.1 Voraussetzungen und Informationen für den Beweisablauf

- Es gibt drei Lemmata von Charles Hemmit, die nicht bewiesen werden sondern angenommen werden müssen.

  Für ein festes n >= 1 sei $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$

  1) Die Funktion f(x) ist ein Polynom der Form $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, dessen Koeffizienten ganze Zahlen sind.

  2) $Für\ 0 < x < 1\ ist\ 0 < f(x) < \frac{1}{n!}$

  3) Die Ableitungen $f^k(0) und f^k(1)$ sind für alle k>=0 ganze Zahlen.

- Als Grundlage für den Beweis wird eine bestimmte Funktion verwendet

$$F(x) = s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \pm \ldots + s^{2n-2n}\ f^{(2n)}(x)$$

- Die Funktion F(x) wird mit e^{sx} verknüpft.
- F(x) wird abgeleitet.
- Die Stammfunktion wird gebildet und ein Integralwert N wird berechnet.
- N wird nach unten und oben abgeschätzt, um ein Widerspruch zu erzeugen.

4.2.2 Konkreter Beweis zu e^r

Begonnen wird mit der Annahme, dass e^s aus dem kurzen Beweis rational sei.

Es gilt: $e^s = \frac{a}{b} \quad mit a, b \in \mathbb{Z}\ a, b > 0$

Die Funktion F(x) wird bzgl. der Ableitungen von f(x) ins Unendliche betrachtet, um die Ableitung von F(x) darzustellen. Laut Lemma 1 sind die Ableitungen mit k > 2n gleich 0.

Konkretes, einfaches Beispiel zu Lemma 1:

$$f(x) = x^3 \text{ , } f^{I}(x) = 3x^2 \text{ , } f^{II}(x) = 6x \text{ , } f^{III}(x) = 6 \text{ , } f^{IV}(x) = 0$$

Nach der dritten Ableitungen, haben alle weiteren Ableitungen den Wert 0.

4.2.2.1 Ableitung von F(x)

Die Funktion F(x) kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$F(x) = s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \pm \ldots$$

Der nächste Schritt ist F(x) abzuleiten. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.

I) F(x) mit -s multiplizieren:

$$-sF(x) + s^{2n+1} f(x) = \underline{s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f''(x) \pm \ldots}$$

II) Alle f(x) werden in F(x) explizit abgeleitet:

$$F'(x) = \underline{s^{2n} f'(x) - s^{2n-1} f''(x) \pm \ldots}$$

I) und II) kann man gleichsetzen und erhält diese Gleichung für die Ableitung F(x):

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1} f(x)$$

4.2.2.2 Bilden der Stammfunktion von F(x)

Um die Stammfunktion zu bilden wird F(x) mit e^{sx} verknüpft (multipliziert) und abgeleitet.

$$\frac{d}{dx}[e^{sx} F(x)] = se^{sx} F(x) + e^{sx} F'(x) | \; mit \quad F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[e^{sx} F(x)] = seF(x) + e^{sx} F'(x) = s^{2n+1} e^{sx} f(x)$$

Die Stammfunktion von $s^{2n+1} e^{sx} f(x)$ ist gleich $e^{sx} F(x)$

Mit diesem Wissen kann eine Fläche N im Integrationsbereich zwischen 0 und 1 berechnet werden. Es könnten beliebig andere Werte für den Integrationsbereich genommen werden. Aus Einfachheitsgründen wurden 0 und 1 bevorzugt.

$$N = b\int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x)dx = b\,[e^{sx} F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0)$$

4.2.2.3 Abschätzung nach oben und unten

Der Wert N muss laut Lemma 3 eine ganze Zahl sein:

$$N = aF(1) - bF(0) \in \mathbb{Z}$$

Um ein Widerspruch zu erzeugen, wird N nach oben und nach unten abgeschätzt. D.h., es wird bestimmt zwischen welchen beiden Werten N liegen muss.

Hierfür wird für die untere Abschätzung laut Lemma 2 mit f(x) = 0 eingesetzt und man erhält folgendes:

$$N > b\int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} 0\,dx$$

$$N > 0$$

N muss größer als 0 sein.

Für die Abschätzung nach oben wird ebenfalls laut Lemma 2 mit f(x) = 1/n! eingesetzt:

$$N < b\int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} \frac{1}{n!} dx$$

Einfache Darstellung der Gleichung :

$$N < bs^{2n+1} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{sx} dx$$

Die Stammfunktion wird gebildet und die Integrationswerte 1 und 0 eingesetzt.

$$bs^{2n+1} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{sx} = [\frac{1}{s} e^{sx}]_0^1$$

$$= \frac{1}{n!} b s^{2n+1} \left(\frac{e^s}{s} - \frac{1}{s}\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer wird insofern vernachlässigt, so dass nur e^s als relevant angesehen wird. Der Grund dafür ist, eine Sicherheitsmaßnahme für das Abschätzen nach oben zu gewährleisten.

$$\frac{e^s b s^{2n+1}}{n!}$$

Mit der Annahme zu Beginn e^s sei rational, erhält man mit $a = e^s b$ folgendes:

$$\frac{a s^{2n+1}}{n!}$$

Somit wurde die Abschätzung nach unten und nach oben bestimmt:

$$0 < N < \frac{a s^{2n+1}}{n!}$$

Damit ein Widerspruch zustande kommt, darf der Ausdruck $\frac{a s^{2n+1}}{n!}$ maximal 1 sein.

D.h., dass gelten muss: $n! > a s^{2n+1}$. Für kleine Werte für n ist diese Relation nicht zutreffend. Jedoch ist ab einem bestimmten großen n-Wert diese Relation richtig.

4.2.2.4 Graphische Darstellung der Abschätzungen

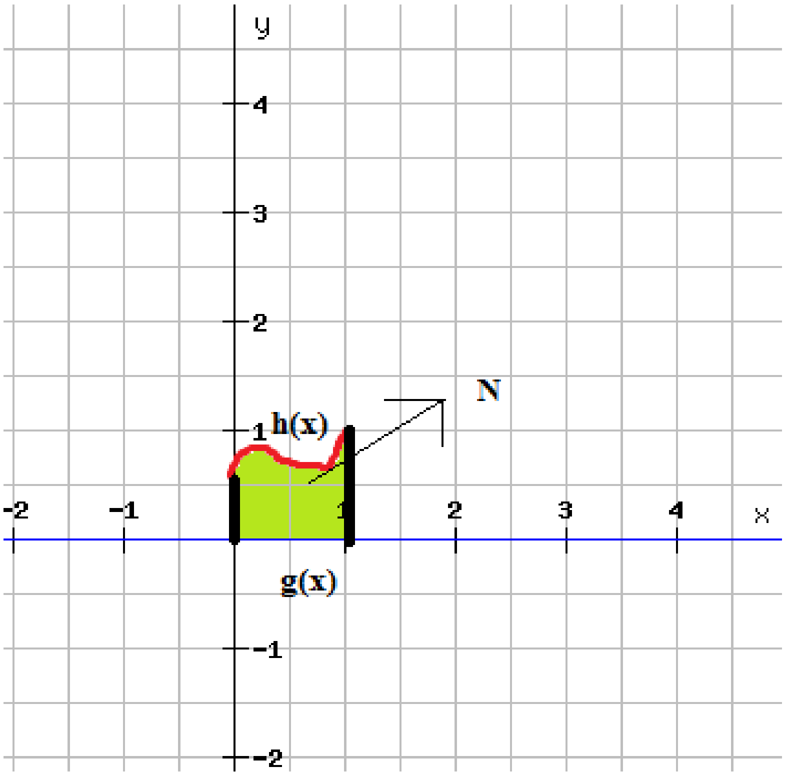


Abbildung 2: Abschätzung nach unten und oben

Dieser Graph ist nur eine einfache Skizze, um den Sachverhalt für die Abschätzung zu verdeutlichen.

g(x) - blauer Graph - entspricht der unteren und h(x) - roter Graph - der oberen Abschätzung.

4.2.2.5 Widerspruch erzeugen

Durch die Abschätzungen wurde deutlich, dass N zwischen 0 und 1 liegen muss. Weiterhin wurde festgestellt, dass N $\in \mathbb{Z}$ ist. Somit erhält man ein Widerspruch. e^s ist irrational.

5

Beweis zu π^2

5.1 Vorgehensweise zu π^2 und die Problematik

Beim Beweis von π^2 werden ebenfalls analoge Schritte abgearbeitet wie in Kapitel 4. D.h., dass die Lemmata aus Kapitel 4 hier ebenfalls gelten, allerdings wird eine andere Funktion F(x) verwendet.

Die detaillierte, komplette Beweisführung wie zu der Eulerschen Zahl wird hier aus bestimmten Gründen nicht vorgeführt. Zum einen ist die Funktion F(x) an sich zu kompliziert aufgebaut und zum anderen ist das Bilden der Stammfunktion von F(x) ebenfalls kompliziert.

Die Beweisführung zu π^2 ist daher nicht hilfreich, um die Irrationalität einer Zahl nachzuvollziehen bzw. verständlicher zu gestalten.

5.2 Konkreter Beweis zu π^2

Man nimmt wieder an π^2 sei rational. Daher ist es folgendermaßen darstellbar:

$$\pi^2 = \frac{a}{b}\ mit a, b \in \mathbb{Z}\, a, b > 0$$

Es gibt eine Funktion F(x) mit der die Irrationalität von π^2 bewiesen wird.

$$F(x) = b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(s)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) \pm \ldots)$$
$$mit\ F^{(2)}(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$$

Der nächste Schritt ist es, F(x) mit π zu verknüpfen (multiplizieren) und abzuleiten.

$$\frac{d}{dx}[F'(x) sin \pi x - \pi F(x) cos \pi x]$$

$$= (F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x)) sin \pi x$$

$$= b^n \pi^{(2n+2)} f(x) sin \pi x$$

$$= \pi^2 a^n f(x) sin \pi x$$

Wie bei der Eulerschen Zahl wird ein Integral berechnet.

$$N = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2 a^n f(x) sin\ \pi\ x\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi} [F'(x) sin \pi x - \pi F(x) cos \pi x]_0^1$$

$$= F(1) + F(0)$$

Aufgrund von Lemma 3 muss N ganzzahlig sein.

Um ein Widerspruch zu erzeugen, wird eine untere und obere Abschätzung durchgeführt. Für die obere Abschätzung muss folgendes gelten:

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

Setzt man für die obere und untere Abschätzung die Werte aus Lemma 2 ein, erhält man folgendes:

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x) si n \pi x\ dx\ < \frac{\pi a^n}{n!}\ 1$$

Da N ein Element der Ganzen Zahlen sein muss, erhält man ein Widerspruch.
π^2 ist irrational.

6

Resümee

In Kapitel 3 wurde eine einfache Beweisführung erläutert. Der Grund dafür ist, dass es ein spezieller Beweis war. Die Beweise in Kapitel 4 und 5 hingegen sind allgemeingültiger.

Wie man feststellen kann ist das Beweisen der Irrationalität einer Zahl wie in Kapitel 4 und 5 recht kompliziert aufgebaut. Es sind sehr viele Voraussetzungen notwendig, um die Irrationalität zu beweisen. Daher kann man sagen, dass diese Beweisführung nicht elegant genug ist, um es einfach darzustellen.

Nichtsdestotrotz ist eine gewisse Struktur zu erkennen. Wenn eine Zahl auf ihre Irrationalität zu prüfen ist, ist eine bestimmte Funktion F(x) notwendig, die "wie aus dem Himmel" kommt. Es ist stark zu vermuten, dass diese Funktion im Laufe der Analysearbeiten entstanden ist, um die Irrationalität zu beweisen. Diese Funktion wird abgeleitet bzw. die Stammfunktion wird gebildet. Im Weiteren wird ein Integral berechnet, um eine untere und obere Abschätzung zu haben, um den Integralwert so einzuschränken, dass ein Widerspruch erzeugt wird.

Daher würde der Punkt der Eleganz solch einer Beweisführung nicht zu 100% wegfallen.

Literaturverzeichnis

- Das BUCH der Beweise, Springer 2004 (2. Auflage), Kapitel 6
- http://www.sofatutor.com/mathematik/videos/irrationalitaet-der-eulerschen-zahl-e
- https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl