

Seminararbeit

# Das Problem der Museumswächter

Christoph Altröck

Student der Wirtschaftsinformatik

Wintersemester 2016/2017

Seminarreihe *Elegante Beweise*

**Seminarleitung:**

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Fachhochschule Wedel

Feldstraße 143, 22880 Wedel

15. Februar 2017

# Inhaltsverzeichnis

Abstract .....	2
1. Problemstellung .....	3
1.1 Motivation .....	3
1.2 Anschauliche Betrachtung .....	3
1.3 Formale Spezifizierung .....	7
1.4 Geschichtlicher Abriss .....	8
2. Hinführung .....	9
2.1 Konkavität und Konvexität .....	9
2.2 Beweisstruktur .....	10
3. Beweis .....	11
3.1 Triangulierung .....	11
3.2 Färbbarkeit .....	14
3.3 Anzahl der Wächter .....	16
3.4 Problematiken .....	17
3.5 Abschließende Betrachtung .....	19
4. Weiterführendes .....	20
4.1 Verwandte Problemstellungen .....	20
4.2 Algorithmen .....	22
Literaturverzeichnis .....	24
Einzelnachweise .....	25

## Abstract

Ziel dieser Ausarbeitung ist es nicht bloß den Beweis von Steve Fisk vorzustellen, sondern ihn in einfachen Worten detailliert und nachvollziehbar zu erläutern und auch zu beleuchten warum der Beweis so geführt wird. Desweiteren wird Wert darauf gelegt Bezüge zur Praxis herzustellen.

# 1. Problemstellung

## 1.1 Motivation

Stellen Sie sich einen Moment vor, Sie seien der Besitzer eines Museums. Natürlich sind Sie um die Sicherheit der Exponate besorgt. Aus diesem Grund wollen Sie sichergehen, dass jeder Punkt des Museums im Blickfeld eines Wächters liegt.

Die Wächter sollen an festen Stellen positioniert werden. Sie können sich drehen, aber nicht durch den Raum bewegen. Denkbar sind also auch Kameras anstelle von Wachpersonal.

Die entscheidende Frage ist nun, wie viele Wächter aufgestellt werden müssen?

## 1.2 Anschauliche Betrachtung

Bei der betrachteten Fragestellung handelt es sich um ein **Minimierungsproblem**, denn ökonomisch betrachtet kosten Wächter etwas, z.B. Gehälter, und es soll schließlich nicht mehr ausgegeben werden als notwendig. Im Fall von Kameras fallen natürlich keine Gehälter an. Denkbar wären dort Beschaffungs-, Strom- oder Wartungskosten, welche ebenfalls mit zunehmender Anzahl Kameras steigen.

Zur Beantwortung der Frage nach der Anzahl Wächter kann das Museum – genauer gesagt der Grundriss des Museums – als Polygon modelliert werden. Das Problem ist daher dem mathematischen Teilgebiet der **Graphentheorie** zugeordnet.

Die nebenstehende Abbildung zeigt beispielhaft den Grundriss einer Ausstellung im Deutschen Historischen Museum.

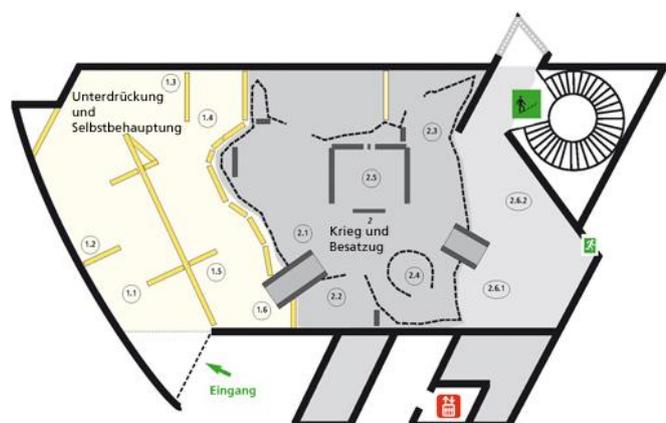


Abb. 1.1 – Museumsgrundriss

Ein **Polygon** sei definiert als ein Graph bestehend aus  $n$  Ecken und  $n$  Kanten, wobei jede Ecke mit zwei anderen unterschiedlichen Ecken über Kanten verbunden ist ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Einige Beispielgraphen für niedrige Werte von  $n$  führen zu der Bedingung, dass  $n$  nicht kleiner als 3 sein kann:

**n = 0** 

*Abb. 1.2*

Dieser Graph besteht aus einer Ecke und keiner Kante, der Wert von  $n$  ist also für Ecken und Kanten nicht identisch. Ein Graph ohne Ecken und Kanten ist streng genommen nicht vorhanden.

**n = 1** 

*Abb. 1.3*

Ein Graph mit einer Ecke und einer Kante, welche die Ecke mit sich selbst verbindet, verletzt die Bedingungen, dass eine Ecke mit zwei weiteren Ecken verbunden sein muss, und diese Ecken von der betrachteten verschieden sein müssen.

**n = 2** 

*Abb. 1.4*

In diesem Graph bestehen für jede Ecke zwei Verbindungen zu anderen Ecken. Allerdings ist eine Ecke immer nur mit einer anderen Ecke (doppelt) und nicht mit zwei unterschiedlichen Ecken verbunden.

**n = 3** 

*Abb. 1.5*

Dieser Graph erfüllt alle Bedingungen, die an ein Polygon gestellt werden.

Ein Polygon ist lediglich ein Linienzug. Für die Lösung des Problems ist die Fläche interessant, welche von dem Polygon umrandet wird. Sie kann als Grundfläche des zu überwachenden Museums interpretiert werden.

Das **Innere eines Polygons** sei definiert als die (endliche) Fläche, welche von einem Polygon eingeschlossen wird inklusive Ränder (Kanten, Ecken).

Es sei angemerkt, dass das Polygon selbst nicht immer mit zum Inneren des Polygons gezählt wird.

Im Folgenden werden einige geometrische **Eigenschaften von Polygonen** diskutiert. Dies diene dem besseren Verständnis, was sich mit Polygonen als Werkzeug modellieren lässt.

Polygone erlauben eine annähernd **beliebige Anzahl** von Ecken und Kanten. Das bedeutet, dass die Graphen beliebig komplex werden können. Die Anzahl ist nicht gänzlich beliebig, da die Anzahl größer oder gleich 3 sein muss. Ergänzend dazu gilt noch die Beschränkung der gleichen Anzahl für Ecken und Kanten.

Des Weiteren werden keine Einschränkungen zu **Kantenlängen** oder **Winkeln** zwischen Kanten gemacht.

**Nicht-gerade Kanten** sind bei Polygonen nicht erlaubt. Dies führt dazu, dass sich bspw. der in Abbildung 1.6 dargestellte Grundriss nicht modellieren lässt. Es ist aber möglich die Form der Kurve durch Einfügen von Ecken anzunähern. Ein Beispiel dafür gibt die Abbildung 1.7. Die exakte Form der Kurve kann jedoch durch keine Näherung abgebildet werden. Der Grund ist, dass dafür unendlich viele Ecken nötig sind, ein Polygon aber nur aus einer endlichen (wenn auch unbeschränkt großen) Anzahl Ecken bestehen kann.

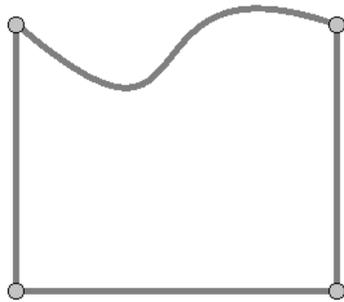


Abb. 1.6 – exakter Grundriss

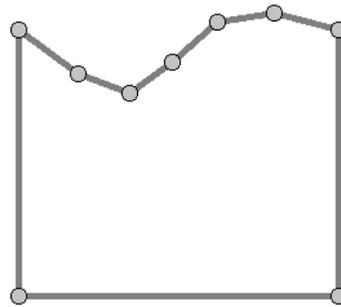


Abb. 1.7 – Annäherung

Bei der Modellierung von Raumteilern oder Trennwänden könnte man versucht sein diese wie in Abbildung 1.8 zu modellieren. Jedoch sind per Definition solche „**losen Enden**“ in Polygonen ausgeschlossen. Eine Ecke wäre dann mit mehr und eine Ecke mit weniger als zwei anderen Ecken verbunden. Der Fehler besteht darin, dass die Trennwand nicht als Körper im Raum betrachtet wurde. Wird sie im Grundriss als Fläche dargestellt, so ergeben sich keine Probleme (Abb. 1.9).

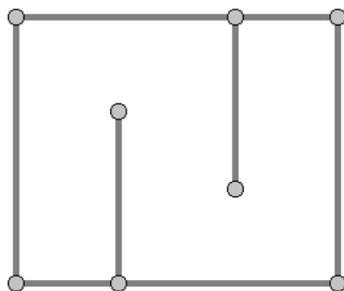


Abb. 1.8 – falsche Modellierung

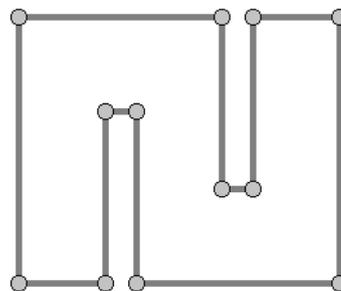


Abb. 1.9 – richtige Modellierung

Es gibt noch ein paar weitere Eigenschaften von Polygonen, wie zum Beispiel ob es sich um ein **überschlagenes Polygon** handelt.

Bei solchen Polygonen kreuzen sich mindestens zwei Kanten. Dies ist jedoch etwas, was bei der Modellierung von Grundrissen nicht auftreten kann. Aus diesem Grund ist es sinnvoll sich auf eine spezieller **Klasse von Polygonen zu beschränken**, welche zur Modellierung herangezogen werden.

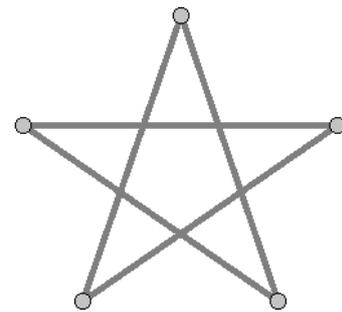


Abb. 1.10 – überschlagen

Ein **einfaches Polygon** verbietet Überschlagen. Außerdem verbietet es nicht-zusammenhängende und nicht-planare Polygone. Es sei angemerkt, dass es sich im Folgenden ausschließlich um einfache Polygone handelt, daher wird der Modifizierer „einfach“ weggelassen.

Bei ersteren handelt es sich um Graphen, die aus mehreren separaten Polygonen bestehen. Beispiele dafür sind die Abbildungen 1.11 und 1.12.

An diesen Beispielen wird deutlich, dass **separate Räume** durch einzelne Polygone in mehreren Graphen modelliert werden müssen. Darüber hinaus ist es nicht machbar, dass sich innerhalb eines Polygons eine (durch ein Polygon begrenzte) Fläche befindet, die nicht zum Inneren des Polygons gehört.

Übertragen auf die Realität heißt das, dass **keine Aufsteller** verwendet werden können. Demnach bleiben nur noch die Wände als Ausstellungsfläche übrig. Dies erklärt auch die englische Bezeichnung des Problems: „Art Gallery Problem“. Die modellierbaren Museen sind also auf Kunstgalerien beschränkt. In Kapitel 4.1 wird diese Beschränkung des klassischen Problems aufgehoben.

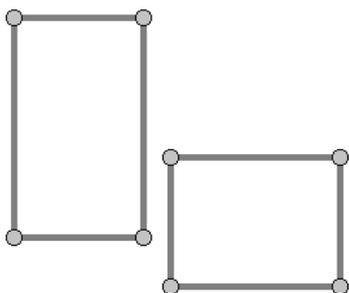


Abb. 1.11 – separate Räume

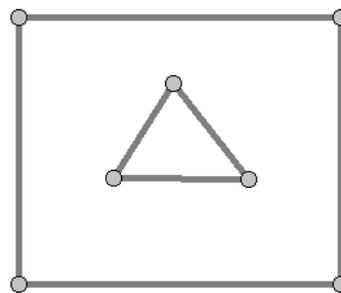


Abb. 1.12 – Aufsteller

Bei **nicht-planaren Polygonen** liegen die Ecken und Kanten nicht alle in derselben Ebene. Ein Beispiel dafür geben die Abbildungen 1.13 und 1.14. Das Problem bei nicht-planaren Polygonen ist, dass in einer Sichtbarkeitsbeziehung zwischen zwei Punkten keine Symmetrie gegeben sein muss. So kann im Beispiel eine Person auf der Empore im linken Teil des Gebäudes alles überblicken. Einer Person im tiefer gelegenen Teil des Raums ist es hingegen nicht möglich auf die Empore zu blicken.

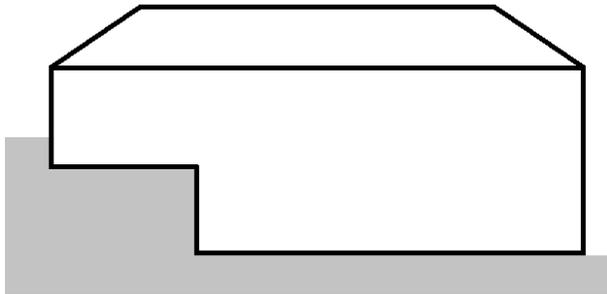


Abb. 1.13 – Seitenquerschnitt

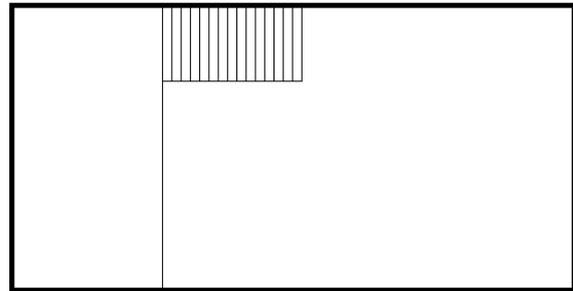


Abb. 1.14 – Grundriss

### 1.3 Formale Spezifizierung

Bisher wurde das Problem anschaulich betrachtet, dies hilft dem groben Verständnis womit man es zu tun hat. Nun soll das Problem mathematisch beschrieben werden. Dadurch wird die Aufgabenstellung **exakt** spezifiziert:

Gegeben sei ein (einfaches) Polygon mit  $n$  Ecken.

Gesucht ist die minimale Anzahl an Wächterpunkten, sodass jeder Punkt im Innern des Polygons durch eine Gerade, welche vollständig im Innern des Polygons liegt, mit mindestens einem der Wächterpunkte verbunden werden kann.

An dieser Stelle sei einmal klar benannt, an welchen Stellen **vereinfacht** wird:

- Der tatsächliche **Blickwinkel** der Wächter ist kleiner als  $360^\circ$ .

In der mathematischen Spezifikation kann ein Wächterpunkt von allen Seiten mit anderen Punkten im Innern des Polygons verbunden werden. Zwar können sich die Wächter drehen, in der Realität ergeben sich jedoch „tote Winkel“, es wird also nicht zu jedem Zeitpunkt jeder Punkt beobachtet. Der Einsatz von aktuellen Entwicklungen wie  $360^\circ$ -Kameras könnte dieses Problem allerdings lösen.

- Die tatsächliche **Blickweite** der Wächter ist nicht unbeschränkt groß.

Die Geraden, mit denen die Punkte verbunden werden, sind in ihrer Länge unbeschränkt. Damit können im Modell Wächterpunkte mit Punkten verbunden werden, die in der Realität von diesem Wächter nicht mehr gesehen werden können.

In der Praxis kann diese Vereinfachung aber vernachlässigt werden, weil die menschliche Sichtweite mit mehreren Kilometern weit größer ist als die größten Museen. Hier sollten eher Überlegungen eine Rolle spielen, ob Gemälde von einem kilometerweit entfernten Wachmann noch sinnvoll geschützt werden können. Bei Kameras hat dieses Problem eine größere Bedeutung aufgrund einer möglicherweise schlechten Auflösung.

- Es ist nicht nach der **Position** der Wächter gefragt.

Die Position zu wissen ist aber nur sinnvoll. Theoretiker mögen zufrieden sein, wenn sie die minimale Anzahl Wächter nennen können. Praktiker hingegen müssen sich fragen, wo diese platziert werden sollen.

Der Beweis, welcher im Zuge dieser Ausarbeitung vorgestellt wird, liefert einen Algorithmus wie die Positionen der Wächter berechnet werden können. Es bekommen also sowohl Theoretiker als auch Praktiker eine Antwort.

## 1.4 Geschichtlicher Abriss

Das Problem der Museumswächter wurde 1973 von Victor Klee gestellt. Er formulierte zu dieser Zeit auch bereits eine Vermutung für die Lösung. Diese basierte auf einem „kritischen Beispiel“ eines Polygonkammes.

Die Vermutung von Klee wird erstmals von Vašek Chvátal im Jahr 1975 bewiesen. Der Beweis wird direkt über Induktion geführt, benötigt allerdings viele Fallunterscheidungen.

1978 formulierte Steve Fisk den noch folgenden eleganten Beweis.

Alok Aggarwal bewies 1984, dass das Finden der minimalen Anzahl Wächter ein NP-Vollständiges Problem ist.

## 2. Hinführung

In diesem Kapitel sollen weitere Grundlagen gelegt werden, die im Hinblick auf den Beweis notwendig sind. Anschließend wird ein Überblick über den Aufbau des Beweises gegeben.

### 2.1 Konkavität und Konvexität

Definition:

Polygone werden als **konkav** bezeichnet, wenn mindestens eine Ecke des Polygons konkav ist, andernfalls nennt man das Polygon konvex.

Ob eine Ecke konkav oder konvex ist hängt von ihrem **Innenwinkel**  $\alpha$  ab:

- Für  $\alpha > 180^\circ$  nennt man die Ecke konkav,
- für  $\alpha < 180^\circ$  konvex.
- Ist  $\alpha = 180^\circ$  wird die Ecke aus dem Polygon entfernt, da sie lediglich eine gerade Kante in zwei Abschnitte teilt.

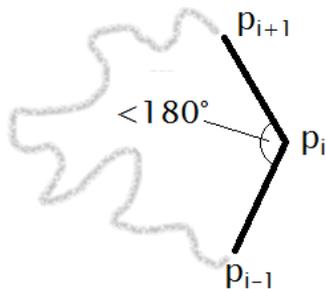


Abb. 2.1 – konvexe Ecke

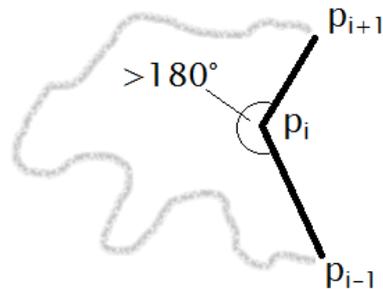


Abb. 2.2 – konkave Ecke

Konvexe Polygone lassen sich stets von **genau einem Wächter** überwachen. Diese Beobachtung führt zu der Überlegung konkave Polygone in konvexe Teilpolygone zu zerlegen, um dann diese separat von je einem Wächter überwachen zu lassen.

Die Strategie entspricht einer **Komplexitätsreduktion**. Statt für ein beliebig komplexes Polygon eine Überwachung finden zu müssen, kann es in einfache Polygone zerlegt werden, bei denen bereits bekannt ist wie sie komplett überwacht werden können.

Die einfachsten konvexen Polygone sind **Dreiecke**. Dreiecke haben noch ein paar weitere Eigenschaften, die sie zu geeigneten Kandidaten für Teilpolygone machen:

- Nur Dreiecke sind **immer konvex**.

**Beweisskizze:** Die Innenwinkelsumme  $S$  im Dreieck ist  $180^\circ$ . Angenommen es gäbe einen konkaven Winkel, dann muss  $S$  größer  $180^\circ$  sein, weil es keine negativen Winkel gibt. Dies führt zu einem Widerspruch.

Diese Eigenschaft ist wichtig, weil sie sicherstellt, dass die Teilpolygone, in die zerlegt wird, tatsächlich immer konvex sind. Bei einer Zerlegung in Vierecke könnte es dazu kommen, dass ein konkaves Viereck, wie in nebenstehend abgebildet, entsteht.

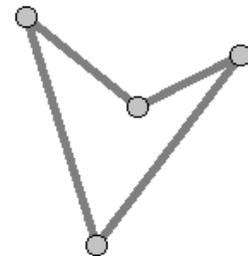


Abb. 2.3

- Bei Dreiecken ist die **Position** des Wächters **beliebig**.

Dies folgt direkt aus der vorigen Eigenschaft. Alle Vierecke und Fünfecke lassen sich ebenfalls von einem einzigen Wächter überwachen. Allerdings ist es bei diesen aufgrund der konkaven Ecken nicht möglich den Wächter an eine willkürliche Position zu stellen. Die Eigenschaft von konkaven Ecken ist ja gerade, dass sich die beiden benachbarten Ecken der konkaven Ecke nicht sehen können.

Warum die beliebige Position des Wächters nicht nur eine positive sondern notwendige Eigenschaft ist, wird in Kapitel 3.2 ersichtlich.

## 2.2 Beweisstruktur

Die **Beweisidee** entspricht eben jenem Ansatz, der eben diskutiert wurde: Ein Zerlegen in Teilpolygone.

Dazu ist es nötig verschiedene Sachverhalte zu beweisen, um aus deren Gesamtheit einen Satz über die minimale Anzahl von Wächtern abzuleiten:

- zeigen dass sich alle Polygone in Dreiecke zerlegen lassen
- zeigen dass der Graph des zerlegten Polygons immer 3-färbbar ist
- zeigen wie häufig die seltenste Farbe maximal vorkommen kann

Mittels der ersten beiden Sätze lässt sich die Positionierung der Wächter ermitteln, der letzte Satz ermöglicht ein Schließen auf die benötigte Wächteranzahl.

## 3. Beweis

Die einzelnen Beweisteile in diesem Kapitel werden anhand eines durchgehenden Beispiels veranschaulicht.

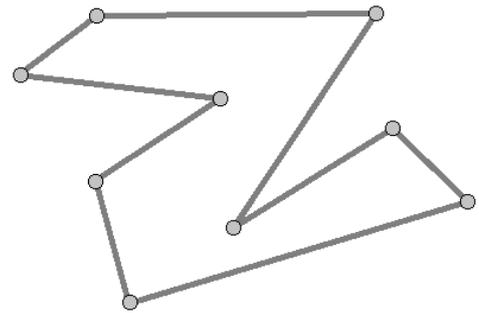


Abb. 3.1 – Beispielpolygon

### 3.1 Triangulierung

Definitionen:

Das Zerlegen eines Polygons in eine maximale Anzahl von Dreiecken durch Hinzufügen von Diagonalen wird als **Triangulierung** bezeichnet. Das Ergebnis einer Triangulierung nennt man trianguliertes Polygon.

Eine **Diagonale** ist eine Verbindung zwischen zwei Ecken des Polygons, welche andere Diagonalen oder Kanten nur in den Ecken berührt und vollständig im Innern des Polygons liegt.

Das bedeutet Diagonalen dürfen nur zwischen Ecken gezogen werden und sie dürfen nichts schneiden. Dadurch ist sichergestellt, dass **keine neuen Ecken hinzugefügt** werden, z.B. über sich kreuzende Diagonalen oder indem eine Diagonale an einer Kante angelegt wird. Wäre es erlaubt Diagonalen zu zeichnen, die außerhalb des Polygoninneren liegen, dann fügen man auf diese Weise Fläche zum Inneren des Polygons hinzu.

Die **Semantik** einer Diagonale ist, dass die verbundenen Ecken „sich sehen können“.

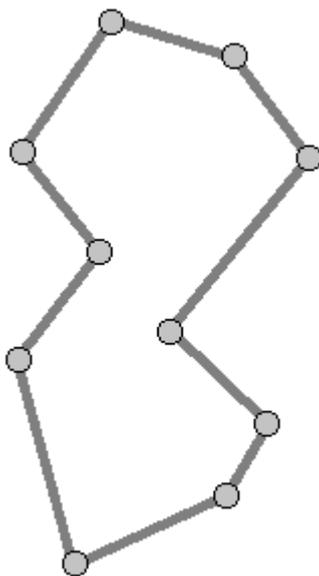


Abb. 3.2 – ein Polygon

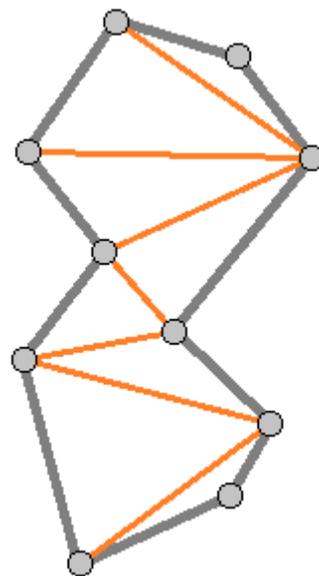


Abb. 3.3 – trianguliertes Polygon

**Satz 1:** Für jedes Polygon existiert eine Triangulierung.

Der Beweis wird mittels **Induktion** über die Anzahl der Ecken  $n$  des Polygons geführt.

**Verankerung:** In Kapitel 1.2 wurde festgestellt, dass  $n$  nicht kleiner als 3 sein kann, daher wird auch die Verankerung für  $n = 3$  geführt. Bei  $n = 3$  ist das Polygon ein Dreieck, und somit schon in Dreiecke zerlegt.

**Induktion:** Für  $n \geq 4$  soll gezeigt werden, dass eine Diagonale gefunden werden kann, welche das Polygon in zwei Teile zerlegt. So lässt sich die Triangulierung des Gesamtpolygons aus denen der Teilpolygone zusammensetzen.

Zum Finden einer Diagonalen wird eine beliebige konvexe Ecke gewählt. Diese wird  $A$  genannt, ihre Nachbarn  $B$  und  $C$ . Die Ecken spannen ein Dreieck  $ABC$  auf. Betrachtet wird die Strecke zwischen  $B$  und  $C$ :

1. Fall: Die Strecke liegt **ganz im Innern** des Polygons.

Damit ist die Strecke  $BC$  die gesuchte Diagonale.

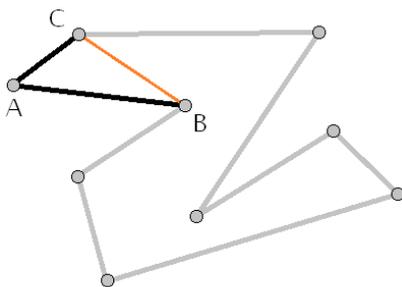


Abb. 3.4 – gültige Diagonale

2. Fall: Die Strecke liegt **nicht ganz im Innern** des Polygons.

Das bedeutet es müssen weitere Ecken des Polygons im Innern des Dreiecks  $ABC$  liegen. Um eine Diagonale zu finden, wird die Strecke  $BC$  in Richtung der Ecke  $A$  verschoben, bis sie die Ecke berührt, die  $A$  am nächsten ist. Diese Ecke sei mit  $Z$  bezeichnet. Weil sich zwischen  $Z$  und  $A$  keine weiteren Ecken oder Kanten befinden, kann zwischen  $A$  und  $Z$  die gesuchte Diagonale gezogen werden.

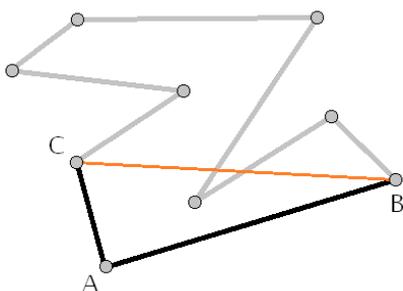


Abb. 3.5 – ungültige Diagonale

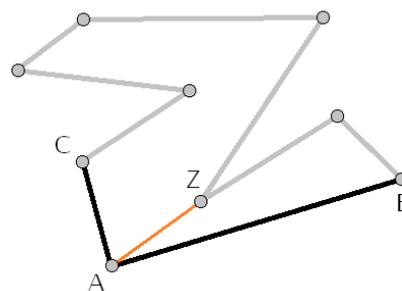


Abb. 3.6 – ermittelte Diagonale

Es gibt eine wichtige **Bedingung**, die gelten muss, damit der obige Beweis gültig ist: Es muss immer eine konvexe Ecke zum Auswählen geben.

Man beschränkt sich im Beweis darauf eine konvexe Ecke zu wählen, weil sich beim Betrachten der drei Ecken A, B und C kaum Aussagen zur **Gestalt** des übrigen Polygons machen lassen. Bei einer konvexen Ecke A ist das kein Problem. Bei einer konkaven Ecke A kann sich vor jeder anderen Ecke des Polygons eine Kante befinden, welche das Ziehen einer Diagonale, ähnlich wie im zweiten Fall, verhindert. Zwar gibt es Ecken, bei denen eine Diagonale gezogen werden kann, wo diese liegen kann aber nicht allgemein bestimmt werden.

Es folgt der Beweis für die Gültigkeit der Bedingung. Er wird mittels **Kontraposition** geführt und verwendet als Lemma, dass die Innenwinkelsumme eines Polygons mit n Ecken  $(n - 2) * 180^\circ$  beträgt.

**Satz 2:** Jedes Polygon enthält mindestens eine konvexe Ecke.

Angenommen alle Polygonecken wären nicht-konvex, dann haben sie alle einen Innenwinkel der größer oder gleich  $180^\circ$  ist.

Für die Innenwinkelsumme S des Polygons gilt dann bei n Ecken:  $S \geq n * 180^\circ$ .

Weil  $n \geq 3$  sein muss, ist S größer als  $(n - 2) * 180^\circ$ .

Dies ist ein Widerspruch zur Aussage des Lemmas, daher kann die Annahme nicht korrekt sein. Somit muss es mindestens eine konvexe Ecke geben.

Ergänzende **Beweisskizze** für die Gültigkeit des **Lemma**:

Es soll zunächst gezeigt werden, dass ein Polygon mit n Ecken in  $n - 2$  Dreiecke zerlegt wird.

**Verankerung:** Für  $n = 3$  ergibt sich 1 Dreieck.

**Induktionsannahme:** Eine Triangulierung eines Polygons mit n Ecken besteht aus  $n - 2$  Dreiecken.

**Induktionsschritt:** betrachtet wird eine beliebige Diagonale, diese zerlegt das Polygon in zwei Teilpolygone. Seien o und p die Anzahlen der Ecken der Teilpolygone. Aus der Induktionsannahme folgt, dass die Teilpolygone aus  $o - 2$  und  $p - 2$  Dreiecken bestehen.

Die beiden Teilpolygone enthalten jede Ecke außer denen der Diagonale genau einmal und die beiden Diagonalenden doppelt, daher gilt  $o + p = n + 2$ .

Die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung entspricht der Summe der Anzahlen der Teilpolygone:  $(o - 2) + (p - 2) = (o + p) - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$ .

Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt  $180^\circ$ . Alle Winkel der Dreiecke aus der Triangulierung liegen an den Ecken des Polygons, daher ist die Innenwinkelsumme der Dreiecke gleich der Innenwinkelsumme des Polygons. Bei  $n - 2$  Dreiecken ergibt sich die Formel des Lemma.

An dieser Stelle soll ein Schritt zurück getreten und betrachtet werden, was im konstruktiven Beweis bisher **durch die Triangulierung erreicht** wurde.

Es wurde gezeigt, dass sich jedes Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Dreiecke sind immer konvex und konvexe Polygone lassen sich stets von einem Wächter überblicken. Somit wurde das Polygon in Regionen eingeteilt, welche jeweils von einem Wächter komplett überwacht werden können.

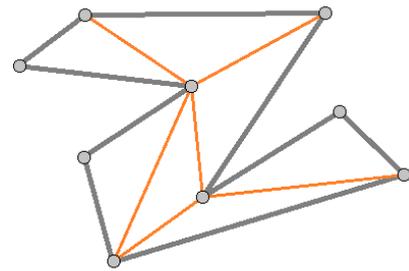


Abb. 3.7 – trianguliertes Polygon

Man könnte auf die Idee kommen schlicht in jedes Dreieck einen Wächter zu stellen, um so die gesamte Grundfläche zu überwachen. Bei dieser Strategie wird jedoch außer Acht gelassen, dass ein Wächter, der an einem Punkt steht, an dem sich **mehrere Dreiecke** berühren, mindestens diese Dreiecke **überwachen** kann. Da sich an Eckpunkten auch mehr als nur zwei Dreiecke berühren können, bieten sich diese besonders für die Positionierung von Wächtern an.

Fraglich ist nun, wie sich für den allgemeinen Fall ermitteln lässt welche Dreiecke ein Wächter, der innerhalb eines Dreiecks steht, noch überwachen kann. Die Lösung dafür bietet eine **3-Färbung** der Ecken des triangulierten Polygons. Daher wird gezeigt, dass solch eine 3-Färbung bei jedem triangulierten Polygon möglich ist.

## 3.2 Färbbarkeit

Bei einer 3-Färbung der Ecken bekommt jede Ecke eine Farbe zugewiesen. Es müssen dabei alle über eine Kante oder Diagonale **verbundenen Ecken unterschiedlich gefärbt** sein, und es dürfen maximal drei verschiedene Farben verwendet werden.

**Satz 3:** Die Ecken jedes triangulierten Polygons sind 3-färbbar.

Der Beweis wird durch **Induktion** über die Anzahl der Ecken  $n$  geführt.

**Verankerung:** Das triangulierte Polygon für  $n = 3$  ist ein Dreieck. Wird jeder Ecke eine der drei Farben zugewiesen, so ergibt sich eine gültige 3-Färbung.

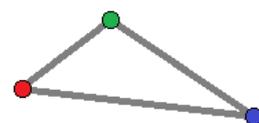


Abb. 3.8 – Basisfall

**Induktion:** Für  $n \geq 4$  soll gezeigt werden, dass sich eine Färbung des Gesamtpolygons aus Färbungen von Teilpolygonen zusammensetzen lässt.

Dazu werden zwei beliebige durch eine Diagonale verbundene Ecken, bezeichnet mit A und B, ausgewählt. Der Graph des Polygons wird entlang der Diagonale in zwei **Teilgraphen zerlegt**, welche dann beide A und B enthalten und ebenfalls trianguliert sind.

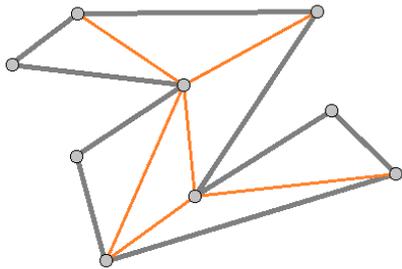


Abb. 3.9 – Gesamtpolygon

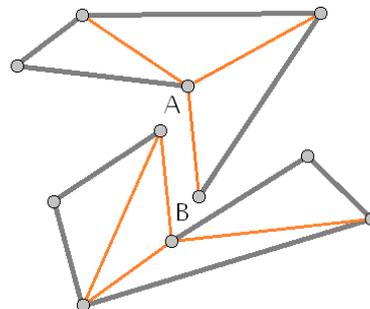


Abb. 3.10 – Teilpolygone

Nach Induktionsannahme sind **beide Teile 3-färbbar**. Für die Färbung werden Farben aus zwei disjunkten je dreielementigen Mengen verwendet, beispielsweise die Farben a, b, c für den ersten und die Farben 1, 2, 3 für den zweiten Graph.

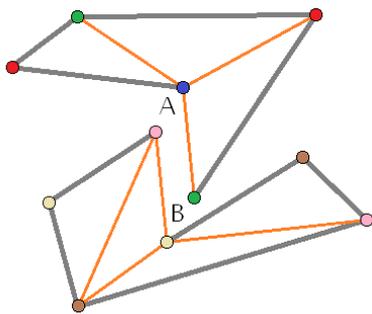


Abb. 3.11 – getrennte Färbungen

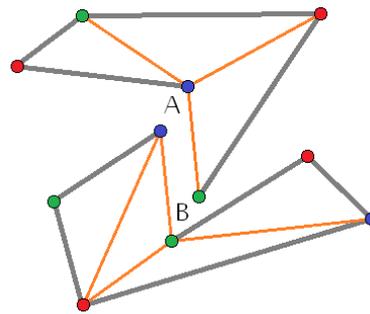


Abb. 3.12 – umgefärbt

Es muss nun noch gezeigt werden, wie sich die **Teilfärbungen verschmelzen** lassen. Dazu werden die Farben im zweiten Graph gegen die aus dem ersten Graph getauscht:

- die Farbe, mit der Ecke A gefärbt ist, wird in die Farbe getauscht, welche A im ersten Graph bekommen hat
- die Farbe, mit der Ecke B gefärbt ist, wird in die Farbe getauscht, welche B im ersten Graph bekommen hat
- die verbliebene Farbe aus dem zweiten Graph wird gegen die verbliebene Farbe des ersten Graph getauscht

Aufgrund der disjunkten Farbmengen ist die 3-Färbung des zweiten Polygons durch das Umfärben nicht ungültig geworden. Die Teilgraphen können wieder zusammengesetzt werden, weil die Ecken A und B in beiden Teilgraphen dieselbe Färbung haben. Durch das Umfärben besitzt der Gesamtgraph eine gültige 3-Färbung.

Nun soll auch darüber **reflektiert** werden, was durch die Färbung erreicht wurde.

Aus der Induktionsverankerung folgt, dass an jedem Dreieck jede Farbe genau ein Mal vorkommt. Werden an alle Ecken gleicher Farbe Wächter gestellt, so ist **jedes Dreieck überwacht** und somit auch die Gesamtfläche.

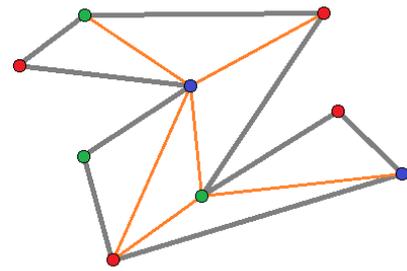


Abb. 3.13 – zusammengesetzt

Wird die Farbe, mit der die wenigsten Ecken gefärbt sind, gewählt, dann ist auch die Zahl der benötigten Wächter minimal. Hier ist nun wichtig, dass die Position des Wächters im Dreieck beliebig ist, sonst könnte unter Umständen nicht eine beliebige Farbe gewählt werden (vgl. Kapitel 1.1). Desweiteren sorgt die Bedingung der Triangulierung keine neuen Ecken hinzuzufügen dafür, dass die Gesamtzahl der Ecken minimal ist, nämlich genau die des Polygons (vgl. Kapitel 3.1).

### 3.3 Anzahl der Wächter

**Satz 4:** Beim Färben von  $n$  Ecken ist die Anzahl der mit der am wenigsten auftretenden Farbe gefärbten Ecken  $\leq \lfloor n/3 \rfloor$ .

Der Beweis wird über **Kontraposition** geführt. Die untere Treppenfunktion [...] rundet den eingeschlossenen Ausdruck ab.

Seien  $a, b, c \in \mathbb{N}$  die Anzahlen der gefärbten Ecken. Diese werden der Häufigkeit nach sortiert, so dass gilt  $a \leq b \leq c$ . Die Gesamtzahl der gefärbten Ecken ist  $n$ , also gilt weiterhin  $a + b + c = n$ .

Angenommen es gelte  $a > n/3$ , das heißt  $a = n/3 + r_a$  mit  $r_a > 0$ .

Aufgrund der Sortierreihenfolge müssen auch  $b$  und  $c$  größer  $n/3$  sein.

Setzt man die alternative Darstellung in die Summenformel ein, ergibt das:

$$a + b + c = n/3 + r_a + n/3 + r_b + n/3 + r_c = n + r_a + r_b + r_c$$

Weil alle  $r > 0$  sind folgt daraus, dass  $a + b + c > n$ . Es wären mehr als  $n$  Ecken gefärbt. Dies ist ein Widerspruch, somit muss gelten:  $a \leq n/3$ .

Weil  $a \in \mathbb{N}$  gilt genauer:  $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ . Es darf nicht aufgerundet werden, denn dann könnte  $a$  größer als  $n/3$  sein, und genau dies führte zu obigem Widerspruch.

Mittels des letzten Beweises kann nun die **Lösung des Problems** formuliert werden:

Zur Überwachung eines Polygons mit  $n$  Ecken sind  $\lceil n/3 \rceil$  Wächter stets ausreichend, und manchmal notwendig.

Wichtig ist zu bedenken, dass die Angabe eine **Obergrenze** darstellt. Im schlimmsten Fall benötigt man so viele Wächter, es können aber auch weniger notwendig sein, zum Beispiel bei konvexen Polygonen.

### 3.4 Problematiken

Satz 1 bewies in Verbindung mit Satz 2 für jedes Polygon die Existenz einer Triangulierung. Diese Triangulierung muss jedoch **nicht eindeutig** sein. Der Gültigkeit der Sätze 3 und 4 tut dies aber keinen Abbruch, da diese auf keine bestimmte Triangulierung angewiesen sind.

Es kann jedoch zu Problemen kommen, wenn das Schema des konstruktiven Beweises genutzt wird, um für ein konkretes Polygon die Positionen bei minimaler Anzahl Wächter zu ermitteln.

Im ersten Beispiel wurden für ein Polygon zwei mögliche Triangulierungen ermittelt und diese 3-gefärbt:

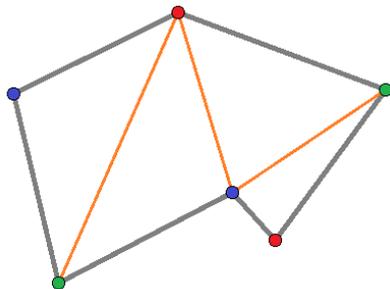


Abb. 3.14 – erste Triangulierung

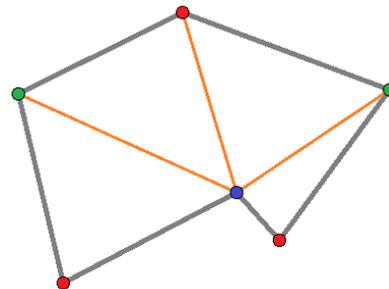


Abb. 3.15 – zweite Triangulierung

Die erste Triangulierung führt dazu, dass jeweils zwei Ecken blau, zwei Ecken grün und zwei Ecken rot gefärbt werden. Die minimale Anzahl Wächter ist also Zwei. Die zweite Triangulierung hingegen liefert für die minimale Anzahl Wächter die Zahl Eins, da nur eine Ecke blau gefärbt wurde.

Es besteht also eine **Abhängigkeit** der minimalen Anzahl von der gewählten Triangulierung.

Das bedeutet, wenn der Algorithmus, den der Beweis liefert, zum Ermitteln der minimalen Anzahl Wächter verwendet werden soll, dann müssen **alle möglichen Triangulierungen** berechnet werden, damit wirklich die minimale Anzahl berechnet wird. An dieser Stelle zeigt sich die **NP-Vollständigkeit** des Problems.

Das zweite Beispiel sucht die optimale Lösung für das in Abbildung 3.16 dargestellte Polygon. Mit dem Algorithmus ergibt sich die Abbildung 3.17 als optimale Lösung. Allerdings kann diese „optimale“ Lösung noch weiter verbessert werden. Dies zeigt die Abbildung 3.18.

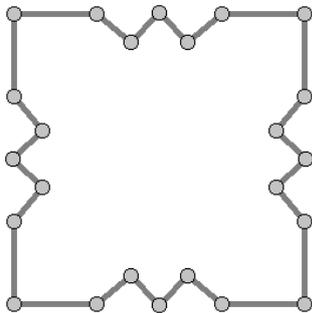


Abb. 3.16

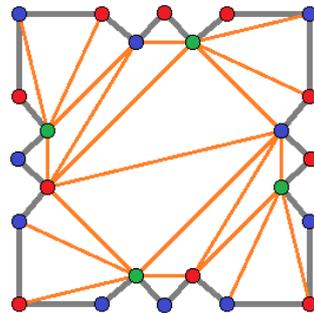


Abb. 3.17

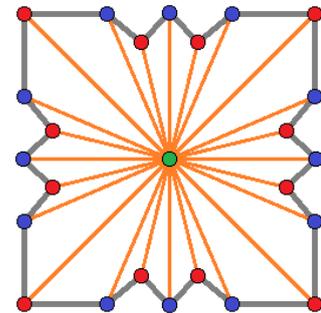


Abb. 3.18

Wo liegt hier das Problem? Der Algorithmus stellt die Wächter in die Ecken des Polygons, weil sich an diesen Punkten mehr als zwei der Dreiecke des triangulierten Polygons berühren können. Dadurch werden jedoch nur die **Ecken als mögliche Standpunkte** für Wächter in Betracht gezogen. Das ist ein weit schlimmeres Problem als die Abhängigkeit von der Triangulierung. Es handelt sich um eine Restriktion im Algorithmus.

In der Literatur wird in diesem Zusammenhang auch von Eckenwächtern und **Punktwächtern** gesprochen. Letztere sind nicht daran gebunden in eine Ecke gestellt zu werden. Das Beispiel zeigt, dass Punktwächter (Abb. 3.18) mächtiger sind als Eckenwächter (Abb. 3.17).

Nicht die Problemstellung schränkt im Algorithmus die Wächterklasse auf die spezielleren Eckenwächter ein, sondern der Beweis. Das Beispiel widerlegt den Beweis jedoch nicht, denn dieser definiert (nur) dass niemals mehr Wächter notwendig sein können als die Obergrenze  $\lfloor n/3 \rfloor$ . Was das Beispiel widerlegt ist, dass der Algorithmus immer die optimale Lösung liefert.

Eine **äquivalente Formulierung** des Problems der Museumswächter ist das Überdecken eines Polygons mit einer minimalen Anzahl sternförmiger Polygone. Ein sternförmiges Polygon besitzt einen nicht-leeren Kern, von dem aus jeder Punkt des Polygons sichtbar ist.

Ein einzelnes sternförmiges Polygon entspricht genau dem Blickfeld eines Wächters. Der Vorteil dieser Formulierung ist, dass sie die Realität intuitiver abbildet, und dass ein Algorithmus, der die minimale Anzahl sternförmiger Polygone berechnet, damit genau die optimale Lösung für das Problem der Museumswächter liefert.

## 3.5 Abschließende Betrachtung

Das Thema dieser Seminarreihe lautet „Elegante Beweise“, daher wird nun noch die Meinung des Autors erläutert worin die Eleganz dieses Beweises besteht.

Der Beweis bewegt sich im Teilgebiet der Graphentheorie. Er bietet sich daher **anschaulich** dargestellt zu werden. Diese Visualisierung kann das Verständnis erleichtern. Auch ist der Beweis generell **einfach** gehalten. Er nutzt nur wenige Konzepte, die allesamt nicht zu komplex sind.

Die folgende Abbildung zeigt den Kernausschnitt des Originalbeweises von Fisk. Beim orange umrandeten Text handelt es sich um die mathematische Problemstellung, der blau umrandete Text entspricht der Interpretation als Problem der Museumswächter, und der rot umrandete Text ist der gesamte Beweis.

In 1975 Chvátal [1], proved the following result:

**THEOREM.** *If  $S$  is a polygon with  $n$  vertices, then there is a set  $T$  of at most  $n/3$  points of  $S$  such that for any point  $p$  of  $S$  there is a point  $q$  of  $T$  with the segment  $pq$  lying entirely in  $S$ .*

If we think of  $S$  as a museum, with paintings on the walls, then the theorem gives a bound on the number of stationary watchmen required to guard every part of the museum. We present a simple proof.

*Proof.* Triangulate  $S$  so that no new vertices are added. Every such triangulation has a coloring with three colors  $a, b, c$ . Let  $T_b$  be the set of vertices colored  $a$ , and assume that  $|T_a| \leq |T_b| \leq |T_c|$ . Choosing  $T = T_a$  implies  $|T| \leq n/3$ . Finally, every point  $q$  of  $S$  lies in some triangle of  $S$ , and every triangle of  $S$  has a point  $p$  of  $T$  on it. Since triangles are convex, we have  $pq \subset S$ .

Abb. 3.19 – Ausschnitt aus Fisks Veröffentlichung

Der Beweis ist also genau so lang wie die Problembeschreibung, oder besser gesagt: er ist genau so **kurz**. Allerdings lässt Fisk für diese Kürze sehr viel „offensichtliches“ weg, wodurch der Beweis nicht mehr so gut nachvollziehbar ist. Im *BUCH der Beweise* von Aigner und Ziegler verbessert sich diese Situation, alles wird dort aber auch nicht erläutert, und auch nicht immer elegant.

Da es sich um einen konstruktiven Beweis handelt, liefert er einen **Algorithmus** für das Finden der Wächterpunkte direkt mit. Leider ermittelt dieser Algorithmus, wie im letzten Kapitel festgestellt, nicht immer die minimale Anzahl Wächter. Da es sich um ein NP-Vollständiges Problem handelt, ist das wohl vertretbar; zumal die Konstruktion eines korrekten Algorithmus nicht Aufgabe eines Beweises ist.

Ein weiterer Pluspunkt ist die **Relevanz** des Beweises **für die Praxis**. Schon die Problemstellung gibt einen Anwendungsfall an.

# 4. Weiterführendes

Dieses Kapitel ergänzt den Beweis um einige interessante Forschungsergebnisse.

## 4.1 Verwandte Problemstellungen

### Orthogonale Polygone

Es handelt sich um eine Spezialisierung des ursprünglichen Problems, welche durch die Nähe zur Architektur eine hohe Bedeutung inne hat.

Obere Schranke:  $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

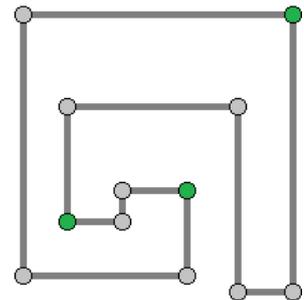


Abb. 4.1 – orthogonales Polygon

### Polygone „mit Löchern“

Es handelt sich um eine Generalisierung des ursprünglichen Problems. Die Polygone dürfen nun Flächen enthalten, die nicht zum Inneren des Polygons gehören. Damit wird die Beschränkung auf Kunstgalerien durch die speziellere Polygonklasse aus Kapitel 1.2 aufgehoben (vgl. Abbildung 1.12).

Es werden zwei neue Variablen benötigt:  $h$  sei die Anzahl der Löcher und  $v$  sei die Anzahl der Ecken der die Löcher umschließenden Polygone. Für  $h = v = 0$  ergibt sich natürlich die Obere Schranke des klassischen Problems.

Obere Schranke für allgemeine Polygone:  $\left\lfloor \frac{n + v + 2h}{3} \right\rfloor$

Obere Schranke für orthogonale Polygone:  $\left\lfloor \frac{n + v + 2h}{4} \right\rfloor$

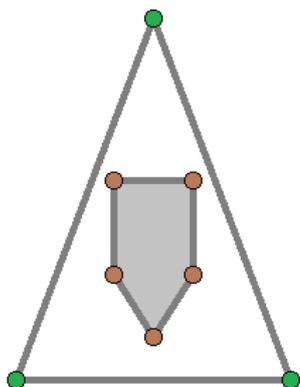


Abb. 4.2 – allgemeines Polygon

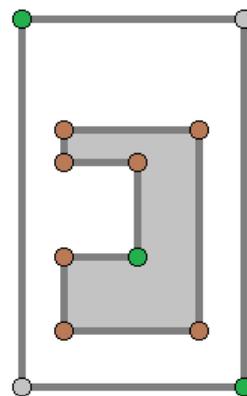


Abb. 4.3 – orthogonales Polygon

## Festungsproblem

Es handelt sich um eine Variation des ursprünglichen Problems. Nun soll nicht mehr das Innere sondern das Äußere des Polygons überwacht werden. Die obere Treppenfunktion [...] rundet den eingeschlossenen Ausdruck auf.

Obere Schranke für allgemeine Polygone:  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Obere Schranke für orthogonale Polygone:  $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1$

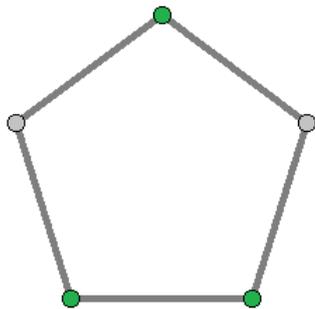


Abb. 4.4 – allgemeines Polygon

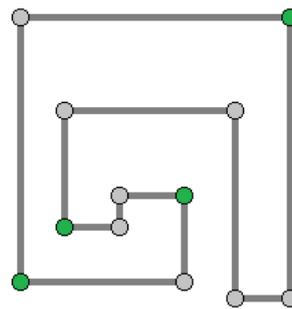


Abb. 4.5 – orthogonales Polygon

## Wandwächterproblem

Es handelt sich um eine Variation des ursprünglichen Problems. Die Wächter müssen sich nun entlang der Kanten bewegen und können alles sehen, was von irgendeinem Punkt der Kante sichtbar ist.

Obere Schranke für allgemeine Polygone:  $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$

Obere Schranke für orthogonale Polygone:  $\left\lceil \frac{3n + 4}{16} \right\rceil$

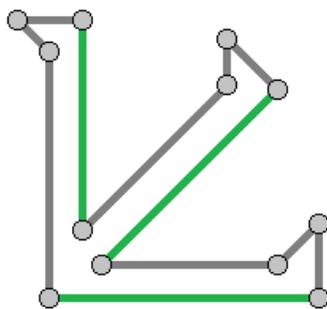


Abb. 4.6 – allgemeines Polygon

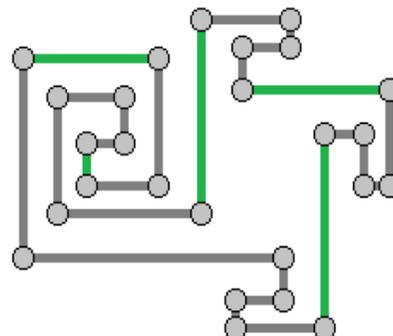


Abb. 4.7 – orthogonales Polygon

## Verallgemeinerung auf Dreidimensionalität

Die Überwachung des Innenraums ist ein offenes Problem.

Bei der Überwachung des Äußeren gibt es eine Lösung. Dabei müssen sich die Wächter auf der Oberfläche des Polyeders befinden. Die Variable  $F$  sei die Anzahl der einzelnen Flächen, welche zusammen die Oberfläche bilden.

Obere Schranke für  $F \geq 10$ :  $\left\lfloor \frac{2F - 4}{3} \right\rfloor$

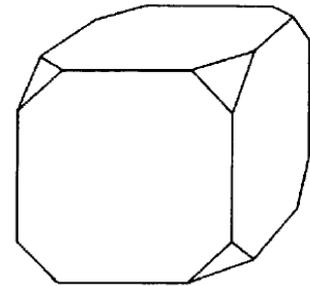


Abb. 4.6 – Polyeder

## 4.2 Algorithmen

Dieses Kapitel soll einen sehr groben Überblick über teilweise sehr komplizierte Algorithmen geben. Wichtig ist zu bedenken, dass die Algorithmen zur Triangulierung nur irgendeine gültige und nicht notwendigerweise die optimale Triangulierung berechnen.

### Triangulieren

Eine direkte Implementierung des **rekursiven** Algorithmus, welcher durch die Beweisführung geliefert wird, führt zu einer Komplexität von  $O(n^2)$ .

In 1978 entwickelten Lee und Preparata einen **Sweep-line-Algorithmus** zur Zerlegung eines Polygons in monotone Polygone. Ein Polygon ist monoton bezüglich einer Linie  $L$ , wenn jede Orthogonale zu  $L$  das Polygon höchstens zweimal schneidet. Ein Beispiel für ein monotones Polygon bezüglich der  $X$ -Achse ist die Abbildung 3.2 in Kapitel 3.1.

Die Idee einer Sweepline ist das Polygon von oben nach unten zu durchlaufen, indem eine gedachte zur  $X$ -Achse parallele Linie verschoben wird. Damit wird das 2D-Problem in Serie von 1D-Problemen reduziert.

Der Vorteil monotoner Polygone ist, dass sich diese mittels eines Algorithmus von Garey, Johnson, Preparata und Tarjan in  $O(n)$  triangulieren lassen. Die Zerlegung hat eine Komplexität von  $O(n \cdot \log n)$ , welche der Komplexität des gesamten Algorithmus entspricht.

Tarjan und Van Wyk entwickelten 1986 einen Algorithmus, der es über eine Zerlegung in Trapeze auf eine Laufzeit von  $O(n \cdot \log \log n)$  brachte.

1991 erreichte der Algorithmus von **Seidel** eine Laufzeit von  $O(n \cdot \log^* n)$ .  $\log^*(n)$  (gesprochen „log star“) entspricht der Anzahl wie oft die Logarithmusfunktion nacheinander angewandt werden muss, bis das Ergebnis kleiner oder gleich 1 ist. Die Funktion ist definiert als

$$\begin{aligned} \log^*(n) &= 0 && \text{für } n \leq 1 \\ \text{und } \log^*(n) &= 1 + \log^*(\log(n)) && \text{für } n > 1. \end{aligned}$$

Ebenfalls 1991 findet Bernard Chazelle einen Algorithmus, der von sich behauptet eine Triangulierung in Linearzeit vornehmen zu können. Aus der zugehörigen Publikation wurde dies für den Autor dieser Ausarbeitung jedoch nicht ersichtlich.

## **Färbung**

Die einzig brauchbare Information bezüglich Algorithmen zur Färbung der Ecken triangulierter Polygone ist ein Algorithmus von Toussaint und Avis. Dieser berechnet unter Verwendung minimaler Adjazenzinformationen eine Färbung in  $O(n \cdot \log n)$ .

# Literaturverzeichnis

Aigner, Martin; Ziegler, Günter: *Das BUCH der Beweise*. Springer 2004 (2. Auflage)

Chazelle, Bernard: *Triangulating a Simple Polygon in Linear Time*. Discrete Comput. Geom. 6:485-524, 1991

<https://www.cs.princeton.edu/~chazelle/pubs/polygon-triang.pdf>

(zugegriffen am 19.12.2016)

Fisk, Steve: *A short proof of Chvátal's watchman theorem*. J. Combin. Theory Ser. B, 24:374, 1978

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009589567890059X>

(zugegriffen am 05.12.2016)

Leitte, Heike: *Triangulierung von Polygonen*. Vorlesungsskript, Universität Heidelberg, 2012

<http://www.iwr.uni->

[heidelberg.de/groups/CoVis/Teaching/AG\\_SS12/AG\\_5\\_PolygonTriangulation.pdf](http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/CoVis/Teaching/AG_SS12/AG_5_PolygonTriangulation.pdf)

(zugegriffen am 10.12.2016)

O'Rourke, Joseph: *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987

[http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art\\_Gallery\\_Full\\_Book.pdf](http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Full_Book.pdf)

(zugegriffen am 05.12.2016)

Seidel, Raimund: *A Simple and Fast Incremental Randomized Algorithm for Computing Trapezoidal Decompositions and for Triangulating Polygons*. Computational Geometry: Theory and Applications 1 51-64, 1991

<http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall05/cos528/handouts/A%20Simple%20and%20fast.pdf>

(zugegriffen am 19.12.2017)

# Einzelnachweise

Die Abbildung 1.1 wurde der Homepage des Deutschen Historischen Museums entnommen (<http://www.dhm.de/archiv/ausstellungen/deutsche-polen/>, zugegriffen am 06.12.2016).

Der Beweis von Chvátal kann in O'Rourke nachgelesen werden (Kapitel 1.2.1, Seiten 6-9).

Die NP-Vollständigkeit des Problems wird von O'Rourke diskutiert (Kapitel 9.3, Seite 242).

Der Beweis für Satz 1 stammt aus dem Buch von Aigner und Ziegler (Kapitel 31, Seite 233).

Der Teilbeweis, dass ein Polygon in  $n - 2$  Dreiecke zerlegt wird, welcher in der Beweisskizze des Lemmas verwendet wird, stammt aus dem Vorlesungsskript von Leitte (Folie 7).

Die Grundidee des Beweises von Satz 3 stammt ebenfalls aus dem Buch von Aigner und Ziegler (Kapitel 32, Seite 232), wurde jedoch an einigen Stellen mit Unterstützung der Seminarleitung ergänzt.

Der Beweis für Satz 4 stammt aus dem Buch von O'Rourke (Kapitel 1.2.1, Seiten 5-6).

Die verwandten Problemstellungen sowie einige algorithmische Aspekte werden bei O'Rourke erläutert:

- Orthogonale Polygone (Kapitel 2.2.2, Seite 46),
- Polygone „mit Löchern“ (Kapitel 5.1, Seite 126),
- Festungsproblem (Kapitel 6.2.1, Seite 146; Kapitel 6.2.2, Seite 149),
- Wandwächterproblem (Kapitel 3.1, Seite 81),
- Verallgemeinerung auf Dreidimensionalität (Kapitel 10.2.4, Seite 257),
  
- Sweepline Algorithmus (Kapitel 1.2.2, Seite 11)
- Zerlegung in Trapeze (Kapitel 1.3.2, Seite 26)
- Färbung (Kapitel 1.2.2, Seite 10)

Die Algorithmen von Seidel und Chazelle sind in deren Veröffentlichungen zu finden.