

FACHHOCHSCHULE WEDEL

Seminararbeit

Thema:

Elegante Beweise

Vervollständigung lateinischer Quadrate

**bei Prof. Iwanowski
von Sylvia Reißmann**

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	3
1.1.	Vorbemerkung	3
	Was ist ein lateinisches Quadrat?	
1.2	Das lateinische Quadrat im Alltag	3
1.3.	Problemstellung	4
2.	Definitionen	4
2.1	Zeilen-Matrix	4
2.2	Partielles lateinisches Quadrat	5
2.3	Lateinisches Rechteck	5
3.	Durchführung des Beweises	5
3.1	Beweisstruktur	5
3.2	Satz von Hall	6
3.3	Beweis Lemma 1	6
	Vervollständigung lateinischer Rechtecke	
3.4	Beweis Satz	7
	Vervollständigung partieller lateinischer Quadrate mit maximal $n-1$ gefüllten Zellen	
3.4.1	Teil 1	8
	gefüllt mit maximal $n/2$ verschiedenen Symbolen	
3.4.2	Teil 2	11
	gefüllt mit mehr als $n/2$ verschiedenen Symbolen	
	Literatur- /Quellenverzeichnis	14

1. Einführung

1.1 Vorbemerkung

In dieser Seminararbeit geht es um den Beweis zur Vervollständigung lateinischer Quadrate, der von Martin Aigner und Günter M. Ziegler in deren Buch der Beweise vorgestellt wurde.

Ein lateinisches Quadrat ist ein Quadrat, dass aus $n \times n$ Feldern besteht, welche mit n verschiedenen Symbolen gefüllt werden. n ist dann die Ordnung des lateinischen Quadrates. Das Besondere ist, dass jedes Symbol pro Reihe und Spalte genau einmal vorkommen muss.

Bei der Auswahl der Symbole ist es inzwischen üblich, die Zahlen von 1 bis n zu wählen, während Euler noch lateinische Symbole verwendete. Daher stammt der Name dieser Quadrate.

[1]

2	3	1	4
1	4	2	3
4	1	3	2
3	2	4	1

1.2 Das lateinische Quadrat im Alltag

Für das lateinische Quadrat gibt es einige Anwendungsfälle, von denen hier ein paar genannt werden sollen. Zu diesen zählt unter anderem die statistische Versuchsplanung. Mit Hilfe eines lateinischen Quadrates werden hier beispielsweise verschiedene Versuche verschiedenen Versuchsgruppen zugeordnet.

Ein weiteres Vorkommen von lateinischen Quadraten findet sich in der Algebra in Verknüpfungstabellen. Bei der "+"-Verknüpfung einer Gruppe mit seinen eigenen Elementen entsteht innerhalb der Verknüpfungstabelle ein lateinisches Quadrat.

+	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_0
R_2	R_2	R_3	R_4	R_0	R_1
R_3	R_3	R_4	R_0	R_1	R_2
R_4	R_4	R_0	R_1	R_2	R_3

Weiterhin werden lateinische Quadrate verwendet, um die Existenz von bestimmten Ebenen zu beweisen. Dieses passiert mit Hilfe von orthogonalen lateinischen Quadraten. Zwei lateinische Quadrate müssen um zueinander orthogonal zu sein die selbe Ordnung besitzen. Wenn diese beiden Quadrate übereinander gelegt werden, müssen bestimmte Kombinationen der jeweiligen Füllsymbole genau einmal vorkommen. [2]

Der letzte hier aufgeführte Anwendungsfall ist der vermutlich bekannteste. Es handelt sich um mathematische Rätsel, im Besonderen das Sudoku. Hierbei wird zwar durch das Unterteilen eines 9×9 Feldes in einzelne 3×3 Felder eine Änderung vorgenommen, aber das Prinzip bleibt im wesentlichen das selbe wie bei lateinischen Quadraten.

3			2	4		6		
	4						5	3
1	8	9	6	3	5	4		
				8		2		
		7	4	9	6	8		1
8	9	3	1	5		6		4
		1	9	2		5		
2			3			7	4	
9	6		5			3		2

1.3 Problemstellung

Es geht darum, zu zeigen, wann ein teilweise gefülltes lateinisches Quadrat auf jeden Fall vervollständigt werden kann. Also wie viele Zellen zu Beginn des Füllvorgangs bereits mit Symbolen besetzt sein dürfen, ohne dass beim Füllen ein Konflikt entstehen kann. Dieser Wert lässt sich direkt einschränken, mit Hilfe eines kleinen Beispiels. Nehmen wir einmal an, wir haben in einem lateinischen Quadrat der Ordnung n bereits n oder mehr Felder gefüllt. so lässt sich bereits mit den n gefüllten Zellen zeigen, dass das Quadrat nicht vervollständigt werden kann. Das ist beispielsweise der Fall, wenn die erste Reihe bis auf die letzte Zelle gefüllt wird und das in dieser Zeile fehlende Symbol in einer anderen Zeile, aber der selben Spalte eingetragen wird (siehe Abbildung).

In diesem Quadrat wird aktuell keine Regel verletzt, denn kein Symbol taucht mehr als einmal pro Reihe und Spalte auf. Wenn das Quadrat nun allerdings gefüllt werden soll, entsteht ein Konflikt bereits in der ersten Reihe, in der Zelle oben rechts.

Aus diesem Grund wird der Beweis geführt für teilweise gefüllte lateinische Quadrate, in denen maximal $n - 1$ Zellen gefüllt sind.

1	2	...	$n-1$	
				n

[6]

Der zu beweisende Satz lautet also: Jedes partielle lateinische Quadrat (teilweise gefülltes lateinische Quadrat) der Ordnung n , in dem maximal $n - 1$ Zellen gefüllt sind, kann zu einem vollständigen lateinischen Quadrat der Ordnung n ergänzt werden.

2. Definitionen

2.1 Zeilen-Matrix

Die Zeilen-Matrix eines lateinischen Quadrates ist eine andere Darstellungsweise für eben dieses. Sie besteht aus drei Zeilen, "R", "C" und "E", die für Reihen, Spalten und Elemente stehen. Jede der drei Zeilen beinhaltet n^2 Elemente. Die Reihenzeile jede Reihennummer so oft, wie jede Reihe Spalten hat, die Spaltenzeile jede Spaltennummer so oft, wie jede Spalte Reihen hat und die Elementenzeile jedes der n Elemente genau n mal. Die Matrix lässt sich dann von oben nach unten spaltenweise lesen, in Reihe x in Spalte y befindet sich das Element z . Im Beispiel rechts kann man also ablesen, dass in Reihe 1 in Spalte 1 (also oben links) das Element 1 steht. Besonders ist bei dieser Darstellung, dass jeweils zwei der drei Reihen übereinanderstehend jedes aus den Zahlen 1 bis n bildbare Tupel aufweisen. Für das Erstellen der Zeilen-Matrix ist es notwendig, die beliebigen n Symbole zu den Zahlen von 1 bis n umzubenennen, sonst gehen wertvolle Eigenschaften der Matrix verloren.

1	3	2
2	1	3
3	2	1

[6]

R: 1 1 1 2 2 2 3 3 3
C: 1 2 3 1 2 3 1 2 3
E: 1 3 2 2 1 3 3 2 1

Durch die Zeilen-Matrix lassen sich verschiedene Operationen auf dem Quadrat darstellen. Für das vertauschen von ganzen Reihen oder Spalten können zum Beispiel innerhalb der Reihenzeile die ersten n Zahlen komplett mit den zweiten n Zahlen getauscht werden (vertauschen der ersten beiden Reihen). Des weiteren können zu einem

lateinischen Quadrat über die Zeilen-Matrix konjugierte lateinische Quadrate erstellt werden. Hierzu werden die Zeilen der Matrix vertauscht. Im Beispiel hier wurden die Zeilen rotiert. Das entstandene Quadrat ist ein konjugiertes von dem oberen. Daraus ergibt sich dann ein neues Quadrat. Eine wichtige Eigenschaft von konjugierten Quadraten ist, dass wenn ein Quadrat vervollständigt werden kann, auch alle dazu konjugierten Quadrate vervollständigt werden können. Diese Eigenschaft wird im Folgenden noch verwendet werden.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

[6]

R: 1 3 2 2 1 3 3 2 1

C: 1 1 1 2 2 2 3 3 3

E: 1 2 3 1 2 3 1 2 3

2.2 Partielles lateinisches Quadrat

Ein partielles lateinisches Quadrat ist ein lateinisches Quadrat, dass noch nicht vollständig, sondern nur teilweise gefüllt ist. Wie viele Zellen bereits gefüllt und wie diese angeordnet sind ist hierbei unerheblich. Sie müssen also nicht wie hier im Beispiel zusammenhängend liegen. Natürlich dürfen die bereits gefüllten Zellen untereinander keine Regeln für lateinische Quadrate verletzen.

1	2	3	4
2	4		
3			
4			

[3]

2.3 Lateinisches Rechteck

Ein lateinisches Rechteck ist ein lateinisches Quadrat der Ordnung n , in dem bereits r Reihen komplett ausgefüllt sind. Dieses r muss kleiner als n sein. Die gefüllten Reihen liegen üblicherweise ganz oben im Quadrat, was gegebenenfalls mit Hilfe der Zeilen-Matrix erreicht werden kann (siehe oben).

1	2	3	4	5	6	7	8
7	8	5	6	3	4	1	2
4	3	2	1	8	7	6	5
6	5	8	7	2	1	4	3

[4]

3. Durchführung des Beweises

3.1 Beweisstruktur

Um die These "Jedes partielle lateinische Quadrat der Ordnung n , mit maximal $n-1$ gefüllten Zellen, kann zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n ergänzt werden", werden mehrere einzelne Beweise geführt. Begonnen wird mit dem Lemma 1, das besagt, dass jedes lateinische Rechteck der Ordnung n zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n vervollständigt werden kann. Hierbei wird der Satz von Hall, auch Heiratssatz verwendet, der aus diesem Grund vorher einmal kurz erläutert wird. Auf den Beweis dieses Lemmas folgt dann der Beweis des eigentlichen Satzes (These), der zur besseren Verständlichkeit in zwei Teile aufgegliedert wurde. Der erste Teil beweist für den Fall, dass die Zellen in dem zu vervollständigenden partiellen lateinischen Quadrat bisher mit maximal $n/2$ verschiedenen Symbolen gefüllt sind, der zweite für mehr als $n/2$ verschiedene Symbole.

3.2 Satz von Hall

Der Satz von Hall, auch Heiratssatz genannt, beschäftigt sich mit der Frage, ob zwischen zwei Mengen eine Zuordnung erstellt werden kann, sodass jedem Element der ersten Menge genau ein Element aus der zweiten Menge zugeordnet wird, für das jeweils ein bestimmtes Kriterium erfüllt ist. Das lässt sich gut an dem folgenden Beispiel verdeutlichen, das auch den Namen "Heiratssatz" erklärt.

Es wird angenommen, es gäbe eine Menge I , die aus heiratswilligen Frauen besteht und eine Menge X mit den potentiellen Ehepartnern dieser Frauen. Dann wird für jede Frau i aus der Menge I die Menge A_i aufgestellt, die alle Männer x der Menge X enthält, die die Frau i zu heiraten sich bereit erklären würde. Das Ziel der Zuordnung ist es nun, jeder Frau einen Mann zuzuteilen, den diese Frau auch heiraten möchte, ohne dass zwei oder mehr Frauen den selben Mann zugeteilt bekommen. Daraus lässt sich erkennen, dass die Anzahl der potentiellen Ehemänner mindestens genauso groß sein muss, wie der heiratswilligen Frauen. Wenn das auch für jede Teilmenge der Frauen und der zugehörigen Männer-Gruppe gilt, lässt sich eine Zuordnung erstellen, die die gewünschten Kriterien erfüllt.

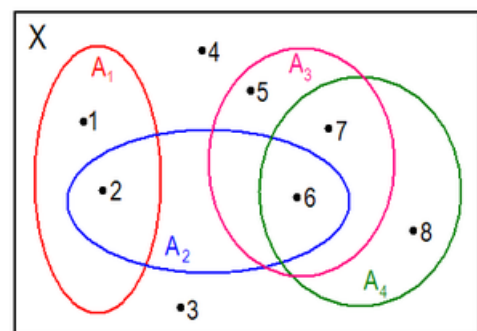
Es ergibt sich als Bedingung für die Möglichkeit einer Zuordnung also die Hall-Bedingung:

$$I_0 \subseteq I \text{ ist } \left| \bigcup_{i \in I_0} A_i \right| \geq |I_0|. \quad \text{I}_0 \text{ stellt dabei eine Teilmenge der Menge } I \text{ dar.}$$

[7]

Hier eine grafische Darstellung:

Hier wurden sozusagen für die Frauen 1, 2, 3 und 4 die Mengen mit ihren Wunschpartnern aufgestellt. Dass für diesen Sachverhalt die Hall-Bedingung erfüllt ist, ist für alle möglichen Teilmengen der betrachteten Menge ersichtlich. Eine mögliche Zuordnung wäre beispielsweise Mann 1 für Frau 1, Mann 2 für Frau 2, Mann 5 für Frau 3 und Mann 7 für Frau 4.



[7]

3.3 Beweis Lemma 1 - Vervollständigung lateinischer Rechtecke

In diesem Abschnitt geht es darum, zu beweisen, dass Jedes $(r \times n)$ -lateinische Rechteck mit $r < n$, zu einem $((r + 1) \times n)$ -lateinischen Rechteck und somit zu einem lateinischen Quadrat ergänzt werden kann.

Es liegt also ein lateinisches Quadrat der Ordnung n vor, das bereits über r gefüllte Reihen verfügt. Der Einfachheit halber wird davon ausgegangen, dass diese r gefüllten Reihen die Reihen 1 bis r des Quadrates sind (Reihen dürfen ja beliebig vertauscht werden!).

Um zu beweisen, dass nun die $r+1$ te Reihe gefüllt werden kann, wird der Satz von Hall auf dieses Problem übertragen:

Die Menge I besteht nun aus den Zellen der Reihe $r+1$, für die jeweils ein Symbol gefunden werden muss. Dieses wird der Menge X entnommen, die aus den Symbolen besteht. Aus

den Elementen der Menge X wird für jedes Element der Menge I , also für jede Zelle der Reihe $r+1$, eine Menge A_i gebildet, die alle Symbole enthält, die in der jeweils zu der Zelle $I_0 \subseteq I$ ist $\bigcup_{i \in I_0} A_i \geq |I_0|$ gehörenden Spalte noch fehlen. Nun kann die Hall-Bedingung geprüft werden:

[7] Die Mächtigkeit jeder der Mengen A_i liegt bei $n-r$, da in jeder Spalte ja bereits r Symbole vorhanden sind und jedes Symbol pro Spalte genau einmal vorkommen muss.

Weiterhin ist bekannt, dass jedes Element in genau $n-r$ der Mengen A_i vorkommen muss, da jedes Element genau einmal pro Spalte und Reihe auftaucht. Ist ein Element bereits in r Reihen aufgetaucht, muss es demnach auch in r Spalten bereits vorhanden sein.

Wenn zur Überprüfung der Hall-Bedingung nun also ein Teilmenge von I ausgewählt wird, die m Elemente (Zellen) enthält, dann enthalten diese zusammen $m(n-r)$ Symbole. Für das maximale Vorkommen jedes einzelnen Symbols, dass jeweils bei $n-r$ liegt, kann eine Variable p eingeführt werden.

Es gilt also:

$$|A_i| = n - r$$

$$p \leq (n-r)$$

$$\text{Summe der Elemente der } A_i = m(n-r)$$

Daraus ergibt sich die Anzahl der verschiedenen Symbole der Mengen A_i mit $m(n-r)/p$, was mindestens so groß wie m sein muss, damit die Bedingung erfüllt ist. Im schlechtesten Fall ist $p = n-r$, alles außer dem m in dem Ausdruck kürzt sich weg und man kann feststellen, dass es genau m verschiedene Symbole für die m Zellen gibt. Ist p kleiner stehen mehr Symbole als nötig zur Verfügung. Die Hall-Bedingung ist erfüllt und Lemma 1 damit bewiesen.

3.4 Beweis Satz - Vervollständigung partieller lateinischer Quadrate mit maximal $n-1$ gefüllten Zellen

Wie bereits erwähnt ist der Beweis in zwei Teile untergliedert. Einmal wird für den Fall bewiesen, dass sich in den gefüllten Zellen maximal $n/2$ verschiedene Symbole befinden, einmal für mehr als $n/2$ verschiedene Symbole. Einer der beiden Fälle muss also immer zutreffen, wodurch der Beweis der beiden Einzelteile als Beweis des ganzen Satzes betrachtet werden kann.

3.4.1 Teil 1 - gefüllt mit maximal $n/2$ verschiedenen Symbolen

Um zu beweisen, dass ein lateinisches Quadrat der Ordnung n , in dem maximal $n-1$ Zellen mit maximal $n/2$ verschiedenen Symbolen gefüllt sind immer zu einem vollständigen lateinischen Quadrat der Ordnung n ergänzt werden kann, wird das Problem zunächst transformiert. Aus maximal $n/2$ verschiedenen Symbolen werden maximal $n/2$ Reihen, die gefüllte Zellen enthalten. Dies kann durch eine Vertauschung

in der Zeilen-Matrix erreicht werden, wenn die Elementen-Zeile in die Reihen-Zeile gelegt wird. Hier wurden die Zeilen der Matrix von oben nach unten rotiert.

Als nächstes werden alle Reihen, die nun Elemente enthalten nach oben geschoben und zwar so, dass die Reihe mit den meisten gefüllten Zellen ganz oben liegt und die anderen nach der Anzahl ihrer gefüllten Zellen absteigend liegen.

Nun müssen einige Variablen zur Durchführung des Beweises festgelegt werden. Die Anzahl der gefüllten Zellen in Reihe i vor Beginn des Füllvorgangs, wird repräsentiert durch f_i und die Anzahl der Reihen, die gefüllte Zellen enthalten sei r . Es ergibt sich durch das Umstellen des Problems, dass $r \leq n/2$ gilt. Durch die Sortierung der Reihen gilt weiterhin $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$.

Ziel ist es nun, die Reihen mit gefüllten Zellen zu vervollständigen, so dass ein lateinisches Rechteck entsteht. Dafür wird bewiesen, dass eine beliebige Zeile ℓ gefüllt werden kann, für die gilt $\ell \leq r \leq n/2$. Es wird davon ausgegangen, dass alle Reihen über ℓ , also die Reihen 1 bis $\ell-1$, bereits gefüllt sind. Außerdem wird die Menge X erstellt, die alle Symbole als Elemente enthält, die in Reihe ℓ fehlen. Die Mächtigkeit von X ergibt sich also als $|X| = n - f_\ell$. Für alle nicht besetzten Zellen in Reihe ℓ werden Mengen A_j aufgestellt. Diese enthalten jeweils alle Elemente aus X , die in der Spalte, in der die Zelle liegt noch fehlen. Für j ergibt sich damit $j = 1$ bis $n - f_\ell$. Um zu beweisen, dass die Reihe ℓ vervollständigt werden kann, wird wieder der Satz von Hall genutzt. Wenn also die Hall-Bedingung für alle Mengen A_j gilt, dann ist die Reihe ℓ auch vervollständigbar. Für diesen Beweis wird eine Hilfsgleichung aufgestellt, die besagt, dass die Ordnung des Quadrates ohne die Anzahl der gefüllten Zellen in Zeile ℓ und ohne die Anzahl der bereits gefüllten Reihen, größer ist, als die Anzahl der bereits gefüllten Reihen und der bereits gefüllten Zellen, der Reihen unter ℓ . Mathematisch ausgedrückt sieht das dann so aus: $n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r$

Das diese Gleichung auch gilt muss gezeigt werden, bevor mit dem Beweis fortgefahren werden kann. Zunächst wird der Fall $\ell = 1$ betrachtet. Für die Gleichung ergibt sich durch Einsetzen von ℓ dann $n - f_1 > f_2 + \dots + f_r$, was durch das Addieren von f_ℓ umgestellt werden kann zu $n > f_1 + \dots + f_r$. Die rechte Seite der Gleichung stellt dann die Aufsummierung der

1		3			
		4			
	4				
			3		

R: 111111 222222 333333 444444 555555 666666
C: 123456 123456 123456 123456 123456 123456
E: 1?3??? ?????? ??4??? ?????? ?4???? ???3??

1					
3					4
		3		2	

R: 1?3??? ?????? ??4??? ?????? ?4???? ???3??
C: 111111 222222 333333 444444 555555 666666
E: 123456 123456 123456 123456 123456 123456

3					4
		3		2	
1					

R: 3?1??? ?????? ??2??? ?????? ??2??? ???1??
C: 111111 222222 333333 444444 555555 666666
E: 123456 123456 123456 123456 123456 123456

Anzahlen der gefüllten Zellen in allen bisher gefüllten Reihen dar. Da wir wissen, dass zu Beginn maximal $n-1$ Zellen gefüllt sind ($f_1 + \dots + f_r \leq n-1$), gilt demnach auch die entstandene Gleichung $n > f_1 + \dots + f_r$. Zur Betrachtung des Falles $\ell \geq 2$ wird die Ausgangsgleichung wieder Umgestellt:

$$n - f_{\ell} - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r \quad | +\ell \quad | -1 \quad | +f_{\ell}$$

$$\Leftrightarrow n > 2\ell - 2 + f_{\ell} + \dots + f_r$$

$$\Leftrightarrow n > 2(\ell - 1) + f_{\ell} + \dots + f_r$$

Nun werden wieder zwei getrennte Fälle betrachtet. Der erste geht davon aus, dass in der Reihe über ℓ zu Beginn genau eine Zelle gefüllt war ($f_{\ell-1} = 1$). Dies führt auf Grund der absteigenden Sortierung dazu, dass alle Reihen bis r nur genau 1 gefüllte Zelle enthalten. Da der Ausdruck $f_{\ell} + \dots + f_r$ dadurch, dass jedes der vorkommenden f_i gleich 1 ist, die Anzahl der Reihen mit gefüllten Zellen ohne die ersten $\ell-1$ Reihen darstellt, darf er durch einen Anderen Ausdruck mit derselben Bedeutung ersetzt werden. Für dieses Ersetzen wird der Ausdruck $r - \ell + 1$ gewählt. Es ergibt sich also:

$$n > 2(\ell - 1) + r - \ell + 1$$

$$\Leftrightarrow n > 2\ell - 2 + r - \ell + 1$$

$$\Leftrightarrow n > r + \ell - 1$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls wahr, da $\ell \leq r \leq n/2$ gilt. Die Maxima für r und ℓ liegen damit jeweils bei $n/2$, es ergäbe sich also $n > n/2 + n/2 - 1 \Leftrightarrow n > n - 1$, was offensichtlich gilt.

Es fehlt noch die Betrachtung von $f_{\ell} \geq 2$. Dafür wird einmal zusammengestellt, was bereits bekannt ist. Die Aufsummierung der gefüllten Zellen der Reihen über ℓ ist mindestens so groß, wie ihre Anzahl multipliziert mit der Anzahl der gefüllten Zellen in Reihe $\ell-1$, da jede dieser Reihen mindestens so viele gefüllte Zellen enthält wie die Zeile $\ell-1$ (absteigende Sortierung). Durch die konkrete Fallbetrachtung steht fest, dass $f_{\ell-1}$ nicht kleiner als 2 sein kann. Mathematisch ausgedrückt: $f_1 + \dots + f_{\ell} \geq f_{\ell-1}(\ell - 1) \geq 2(\ell - 1)$

Außerdem ist die Summe aller gefüllten Zellen maximal $n-1$ ($n > f_1 + \dots + f_r$). Wenn man dieses Wissen vereint zeigt sich: $n > f_1 + \dots + f_r \geq 2(\ell - 1) + f_{\ell} + \dots + f_r$, die Gleichung gilt also auch für diesen letzten Fall und ist damit insgesamt gültig.

Um die Hall-Bedingung zu prüfen werden nun m der A_j -Mengen ausgewählt. Dieses m muss mindestens eine Menge einschließen und maximal alle A_j der Reihe ℓ , es gilt also:

$$1 \leq m \leq n - f_{\ell}$$

Die Vereinigungsmenge der ausgewählten A_j wird mit B bezeichnet. Zur Erfüllung der Hall-Bedingung muss also gelten: $|B| \geq m$

Weiterhin wird die Variable c eingeführt, die die Anzahl der Zellen in den Spalten der m ausgewählten Zellen beschreibt, die mit Elementen aus X gefüllt sind, also Elemente enthalten, die in der Reihe ℓ noch fehlen. Für c ergibt sich als maximale Größe also die Anzahl aller Zellen in den m Spalten, die über ℓ liegen ($m(\ell - 1)$) sowie alle bereits gefüllten

Zellen der Spalten unter der Reihe ℓ . Da diese Anzahl unbekannt ist, wird mit allen bisher gefüllten Zellen unterhalb der Reihe ℓ ($f_{\ell+1} + \dots + f_r$) gezählt, da diese im schlechtesten Fall alle in den betroffenen Spalten liegen: $c \leq (\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r$

Jedes Element x , dass sich in der Menge $X \setminus B$ befindet muss in jeder der m ausgewählten Spalten bereits vorhanden sein. Es fehlt zwar in der Reihe ℓ , aber es fehlt in keiner der ausgewählten Spalten, da es sonst in einer der Mengen A_j vorhanden wäre und somit auch Teil der Vereinigungsmenge der A_j s wäre. Daraus folgt, dass die Anzahl der Zellen in den m Spalten, die Elemente aus X enthalten mindestens so groß wie die Anzahl dieser Elemente multipliziert mit der Zahl der ausgewählten Spalten sein muss: $c \geq m(|X| - |B|)$

Da die Bedingung $|B| \geq m$ erfüllt sein soll wird die Gleichung nach $|B|$ umgestellt.

$$c \geq m(|X| - |B|) \quad | +m|B| \quad | -c$$

$$\Leftrightarrow m|B| \geq m|X| - c \quad | :m$$

$$\Leftrightarrow |B| \geq |X| - c/m$$

Nun können die bekannten Werte eingesetzt werden. Die Mächtigkeit der Menge X , die alle Symbole enthält, die in der Reihe ℓ fehlen, liegt bei $n - f_\ell$ und für c kann die erste Gleichung eingesetzt werden:

$$|B| \geq n - f_\ell - 1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r)$$

Die Bedingung $|B| \geq m$ gilt dann, wenn gilt

$$n - f_\ell - 1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r) \geq m - 1$$

Diese Gleichung muss nun nach m aufgelöst werden.

$$n - f_\ell - 1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r) \geq m - 1 \quad | +1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r)$$

$$\Leftrightarrow n - f_\ell \geq m - 1 + 1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r) \quad | -m \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow n - f_\ell - m + 1 \geq 1/m((\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r) \quad | *m$$

$$\Leftrightarrow m(n - f_\ell - m + 1) \geq (\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r \quad | -(\ell - 1)m$$

$$\Leftrightarrow m(n - f_\ell - \ell + 2 - m) \geq f_{\ell+1} + \dots + f_r$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m(n - f_\ell - \ell + 2) \geq f_{\ell+1} + \dots + f_r$$

Auf der linken Seite der Gleichung ist eine negative quadratische Funktion mit m als Variable entstanden. Es müssen also 2 Lösungen für m gefunden werden, die die Gleichung erfüllen. Sind diese gefunden, werden auch alle Lösungen die zwischen diesen beiden liegen die Gleichung erfüllen, da sie auf dem Graphen der Funktion ebenfalls hoch genug lägen. Um diese Lösungen zu finden wird zunächst mit 1 getestet, da dies der geringstmögliche Wert für m wäre. Das Einsetzen ergibt folgendes:

$$n - f_\ell - \ell + 1 \geq f_{\ell+1} + \dots + f_r$$

Dass diese Gleichung erfüllt ist kann an der ersten zur Hilfe aufgestellten Gleichung gesehen werden, deren Gültigkeit bereits belegt wurde: $n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r$

Die linke Seite beider Gleichungen sieht gleich aus, nur auf der rechten steht bei der ersten ein $\ell - 1$ weniger. Die rechte Seite der ersten Gleichung ist somit kleiner als die der zweiten, wodurch die Gleichung offensichtlich erfüllt ist. Als zweite Lösung wird $n - f_\ell - \ell + 1$ gefunden. Das Einsetzen dieser Lösung führt zu der selben Gleichung wie das Einsetzen der 1, es ist also ebenfalls eine gültige Lösung. Es bleibt zu klären, was mit Werten für m sind, die größer als $n - f_\ell - \ell + 1$ sind. Auch mit diesen ist die Bedingung erfüllt, denn die erste Gleichung kann auch diesen Fall Belegen: $n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r$.

Die rechte Seite beschreibt, in wie vielen Reihen ein Element x maximal vorkommen kann. Da in einem lateinischen Quadrat ein Element immer in genau so vielen Spalten wie Reihen vorkommt, ist dieser Wert übertragbar. Bei größeren Werten für m , muss das Element x also in mindestens einem A_j vorkommen. Dann wäre $B = X$ und $|B| = |X| = n - f_\ell \geq m$.

Die Hall-Bedingung ist erfüllt und die bereits teilweise gefüllten Reihen können zu einem lateinischen Rechteck ergänzt werden. Dass dieses dann zu einem vollständigen lateinischen Quadrat vervollständigt werden kann ist bereits bewiesen worden. Damit ist dieser Beweisteil komplett.

3.4.2 Teil 2 - gefüllt mit mehr als $n/2$ verschiedenen Symbolen

Zu guter Letzt soll nun noch bewiesen werden, dass jedes partielle lateinische Quadrat der Ordnung n , in dem maximal $n - 1$ Zellen mit mehr als $n/2$ verschiedenen Symbolen gefüllt sind, zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n ergänzt werden kann. In diesem Beweis wird mit den Zahlen von 1 bis n als Symbolen gearbeitet. Sind andere Symbole vorhanden könnten diese umbenannt werden, was nach dem Durchführen des Füllvorgangs rückgängig gemacht werden kann. Mit diesem Teilbeweis ist dann der Beweis, dass lateinische Quadrate der Ordnung n mit maximal $n-1$ gefüllten Zellen immer vervollständigt werden können komplett.

Dieser Beweis wird durch Induktion geführt und beschreibt gleichzeitig auch noch, wie man ein solches Quadrat füllen kann.

Die Induktion wird über n , also die Ordnung des Quadrates geführt. Es wird mit $n = 1$ verankert. In einem lateinischen Quadrat der Ordnung 1 mit $n-1$ gefüllten Zellen wäre keine Zelle gefüllt. Ein füllen dieses Quadrates ist somit kein Problem.

Die Induktionsvoraussetzung, die für den Beweis genutzt werden darf, ist nun, dass ein lateinisches Quadrat der Ordnung $n-1$ mit maximal $n-2$ gefüllten Zellen vervollständigt werden kann.

Da die $n-1$ Zellen mit mehr als $n/2$ verschiedenen Symbolen gefüllt sind, kann mindestens eines der n Symbole nur einmal vorkommen. Eines der nur einmal vorkommenden Symbole wird ausgewählt. Der Übersichtlichkeit halber sollte dieses Symbol die Zahl n sein, hier ist es die 7. Kommt diese bisher gar nicht vor kann auch hier eine Umbenennung vorgenommen werden. Dann

s_1	2		7			
s_2		5	4			
s_3			5			
s_4	4					

werden alle Reihen, die bereits mindestens eine gefüllte Zelle enthalten benannt mit $s_1 \dots s_r$ wobei das ausgewählte Symbol n in Reihe s_1 liegen soll. Dann werden diese Reihen auf eine bestimmte Weise angeordnet, wofür wieder die Variablen f_i eine Rolle spielen. Die Reihe s_1 wird in f_1 te Zeile geschoben. Jede weitere Reihe s_i wird in die Zeile $1 + f_1 + \dots + f_i$ gelegt. Im Anschluss daran werden alle Zellen jeweils so weit nach links geschoben, wie es unter Einhaltung der Regeln, die in lateinischen Quadraten gelten möglich ist. Wichtig ist hierbei, dass das ausgewählte Symbol, das am weitesten rechts liegende innerhalb seiner Reihe ist. Dann liegt es genau auf einer der Diagonalen des Quadrates.

•						
2	7					
		•				
			•			
	4	5		•		
			5		•	
4						•

Außer dem ausgewählten Symbol auf der Diagonalen befinden sich weder auf noch rechts von dieser keine Symbole mehr.

2	3	4	1	6	5	
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Nun wird die Diagonale entfernt und die beiden zurückgebliebenen Teil-Quadrate werden zusammengefügt. Dadurch entsteht dann ein lateinisches Quadrat der Ordnung $n-1$. In diesem sind maximal $n-2$ Zellen gefüllt, da eine der gefüllten Zellen mit entfernt wurde. Das sind genau die Eigenschaften, die für das Benutzen der Induktionsvoraussetzung erforderlich sind. Somit kann davon ausgegangen werden, dass dieses kleinere lateinische Quadrat gefüllt werden kann. Das ist hier im nächsten Schritt auch passiert.

2	3	4	1	6	5	7
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Es bleibt zu klären, wie man nun von einem lateinischen Quadrat der Ordnung $n-1$ zu einem lateinischen Quadrat der Ordnung n übergeht. Dafür sollte die rechte freie Spalte zuerst gefüllt werden. Dadurch entsteht ein lateinisches Rechteck, welches bekanntermaßen vervollständigt werden kann. Für dieses Auffüllen darf selbstverständlich auch das zuvor gestrichene ausgewählte Symbol verwendet werden, sonst wäre das Füllen gar nicht möglich. Die freie Spalte wird von oben bis unten von Reihe 2 bis Reihe n gefüllt. Dazu wird jeweils für die Reihen $k = 2 \dots n-1$ das ausgewählte und in dieser Reihe noch fehlende Symbol in das freie Feld in der letzten Spalte gesetzt. Dann wird es mit dem Symbol, das sich in der selben Reihe auf der Diagonalen befindet, dem in Zelle (k,k) also, vertauscht. Wenn das Symbol in der Spalte n noch nicht vorkommt, ist die Aktion beendet und es wird zur nächsten Reihe übergegangen. Die Spalte der neu besetzten Zelle auf der Diagonalen wird dann in diesem Prozess nicht mehr angerührt, ebenso wie alle Zellen unterhalb der

2	7	4	1	6	5	3
5	6	1	4	2	3	7
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	6	5	4	7
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	4	5	2	3	1	7
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

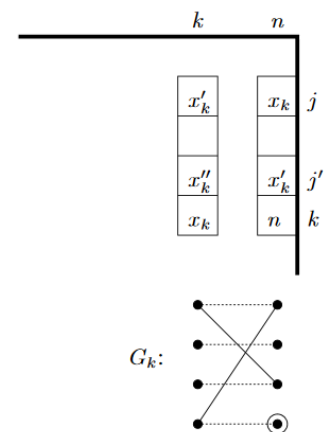
2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	2	7
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	7	2
4	5	2	3	1	6	

Diagonalen. Das sind im Beispiel die grau hinterlegten Zellen. Wenn allerdings ein Konflikt in der rechtesten Spalte auftritt, muss eine Ausweichmöglichkeit gefunden werden. Dafür wird nach dem ersten Tausch, der trotz Konflikt durchgeführt wird, das Symbol, dass den Konflikt herbei führt in seiner Reihe mit dem Symbol in der Zelle der aktuellen Spalte k vertauscht. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis kein Konflikt mehr besteht. Bei der letzten Reihe angekommen, kann die einzige freie Zelle einfach mit dem ausgewählten Symbol besetzt werden. Danach ist nur noch die Vervollständigung des lateinischen Rechtecks zu einem lateinischen Quadrat durchzuführen. Bevor der Beweis akzeptiert werden kann, muss noch geklärt werden, ob die Tauschaktionen im Konfliktfall auch immer durchgeführt werden können.

7	3	1	6	4	2	4
2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	7	2
4	5	2	3	1	6	7



Um dieses Problem näher zu betrachten, wird ein Graf erzeugt, der die Situation abbildet. Die Zellen der rechtesten Spalte und der im Konfliktfall betroffenen Spalte werden als Ecken dargestellt. Die mögliche Tauschverbindung zwischen den beiden Zellen dieser Spalten, die in der selben Reihe liegen werden durch gestrichelte Kanten dargestellt und Zellen mit gleichen Symbolen durch durchgezogene Kanten dargestellt. Hier ist einmal die beim Füllvorgang aufgetretene Situation beispielhaft dargestellt. Das Problem kann als lösbar betrachtet werden, wenn in diesem Graph ein Weg gefunden werden kann, der bei dem ersten eingesetzten Symbol (n) beginnt und irgendwann zu einem Endpunkt führt, also zu einer Ecke, von der aus kein Weg weg führt. Eine solche Ecke führt keinen Konflikt mehr herbei, da keine andere Ecke das selbe Symbol trägt wie sie. Da in den betrachteten Reihen, das Symbol n immer nur in der rechten Reihe vorkommt, da alle anderen auf der Diagonalen liegen bleiben, welche nur in der untersten betrachteten Reihe vorkommt, muss in der linken Spalte mindestens ein Symbol existieren, dass in der rechten Spalte nicht vorkommt. Schließlich kann jedes Symbol nur einmal pro Spalte auftauchen. Der Weg wird aus der Ausgangssituation heraus betrachtet. die Konfliktsymbole liegen zu diesem Zeitpunkt also auch noch in unterschiedlichen Spalten.

Mit dieser Erkenntnis ist der Beweis komplett. Je nach Wunsch können gegebenenfalls umbenannte Symbole wieder umbenannt werden. Außerdem können die Reihen und Spalten Vertauschungen vom Beginn rückgängig gemacht werden.

Mit der Vervollständigung dieses Teilbeweises kann der komplette Beweis als vollständig betrachtet werden. Es wurde gezeigt, dass jedes lateinische Quadrat der Ordnung n , in dem maximal $n-1$ Zellen gefüllt sind, zu einem vollständigen lateinischen Quadrat der Ordnung n ergänzt werden kann.

Literatur-/Quellenverzeichnis

- [1] : <http://www.glenwestmore.com.au/wp-content/uploads/2015/12/latin-squares-orders-4-300x300.png>
- [2] : <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/algebra/lateinische.html>
- [3] : <http://jur.byu.edu/wp-content/uploads/2014/04/329.png>
- [4] : <http://math.stackexchange.com/questions/172606/can-we-find-two-mutually-orthogonal-diagonal-latin-squares-of-orders-4-and-8>
- [5] : <https://de.wikipedia.org/wiki/Heiratssatz>
- [6] : Buch mit Beweis von Aigner und Ziegler (Kapitel 32)
http://www.bioinfo.org.cn/~wangchao/maa/r.Proofs_from_THE_BOOK_4th.pdf
aus dieser Quelle stammen alle Bilder im Kapitel 3.4.2
- [7] : Allgemeine Infos über lateinische Quadrate
https://de.wikipedia.org/wiki/Lateinisches_Quadrat
- Seminararbeit mit selbem Thema
<http://imsc.uni-graz.at/baur/lehre/WS2013-Seminar/S12.pdf>