GTI, FORMALE LOGIK UND VERIFIKATION SS 2015

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Übungsblatt 06 (6 Aufgaben) S.1/3

Aufgabe 1)

Gegeben sei folgendes Programm:

```
{n: integer}

k := n; s := 0;
while s < n*n do
begin
  s := k - s;
  k := k + s;
end {while}
```

a) Was berechnet dieses Programm? Geben Sie die genaue Abhängigkeit von n an!
b) Beweisen Sie a)!
Hinweis: Sie sollten mit diesem Teil beginnen, also erst mal durch Ausprobieren die Invariantenbedingungen für s und k bestimmen, nachsehen, wann das Programm abbricht, und dann erst die genaue Abhängigkeit des Ergebnisses von n angeben.

Tipp: Vergleichen Sie diese Aufgabe mit dem Ergebnis von Aufgabe 3 vom 5. Übungsblatt!

Aufgabe 2)

Zeigen Sie, dass das folgende Programm DIV und MOD ausrechnet, indem Sie eine geeignete Invariantenbedingung für die Schleife formulieren und mit vollständiger Induktion beweisen und daraus die am Ende angegebene Nachbedingung folgern:

```
(x ≥ 0) ∧ (y > 0) ∧ x,y ∈ ℤ            φ

div := 0;
mod := x;
while mod ≥ y do
   begin
      mod := mod - y;
      div := div + 1;
   end

(x = div * y + mod) ∧ (0 ≤ mod < y)    ψ
```

Tipp: Die Invariantenbedingung ist ein Teil der Nachbedingung.

Aufgabe 3)

Was berechnet die folgende Prozedur? Was ist die schwächste Vorbedingung dafür? (Beweis!)

Hinweis: Beweis durch vollständige Induktion über einen der Parameter.

```
procedure f(m,n: integer): integer

begin
   if (m <= 0)
      return 1
   else
      return m * f(m-1, n);
end;
```

Ersetzen Sie die Bedingung für den nichtrekursiven Aufruf durch (m < 0).
Was wird dann berechnet?

Aufgabe 4)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
procedure f(x, y, z: ℕ): ℕ;
begin
   if (x ≤ y) then
       return z
   else
      return f(x-1, y, z+1);
end;
```

a) Berechnen Sie f (10,7,3)

b) Was berechnet f(x,y,z) im allgemeinen? Beweisen Sie das durch vollständige Induktion über einen der Parameter!

Aufgabe 5)

Betrachten Sie folgende Funktion:

```
function f(x : R+) : R;
begin
   if x<=1 then
      return x²
   else
      return f(x/10);
end;
```

a) Beschreiben Sie in Worten, was diese Funktion berechnet.

b) Begründen Sie, warum Sie die Aussage von a) nicht mit vollständiger Induktion beweisen können.

c) Versuchen Sie dennoch, eine nachvollziehbare Begründung zu geben, warum die Aussage von a) gilt.

Aufgabe 6)

Betrachten Sie folgende Funktion:

```
function f(x : ℕ) : ℕ;
begin
   if x = 1 then
      return x
   else
      if x MOD 2 = 1
         then return f(x/2)
         else return f(3x+1)
end;
```

a) Beschreiben Sie und begründen Sie, was die Funktion berechnet, wenn sie zu einem Ende kommt.

b) Warum kann man nicht wie in Aufgabe 5 begründen, dass die Funktion immer zu einem Ende kommt?

c) Kann man aus b) zwingend folgern, dass es Fälle gibt, in denen die Funktion nicht zu einem Ende kommt?
<u>Tipp:</u> Googeln Sie mal nach Ulam-Collatz!