Aufgabe 6

Gegeben:
Wir werden die folgende Aussage mit vollständiger Induktion beweisen:
Seien $g_1, \dots, g_n$ verschiedene Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind ($n \geq 2$), dann haben alle diese Geraden einen Punkt gemeinsam.

Beweis:

1) Für $n = 2$ ist die Aussage wahr, denn je 2 nichtparallele Geraden schneiden sich.

2) Angenommen, die Aussage gilt für n. Seien nun $n + 1$ Geraden $g_1, \dots, g_{n+1}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n dieser Geraden (also $g_1, g_2, \dots g_n$) einen gemeinsamen Punkt: nennen wir ihn einmal x. Genauso haben auch die n Geraden $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, g_{n+1}$ einen Punkt gemeinsam: wir nennen ihn y. Die Gerade g_1 liegt in beiden Gruppen und enthält also sowohl x als auch y. Das trifft auch auf g_{n-1} zu. Nun schneiden sich aber g_1 und g_{n-1} in einem eindeutigen Punkt, also muss $x = y$ sein. Deshalb haben alle Geraden $g_1, \dots, g_{n+1}$ einen gemeinsamen Punkt, nämlich x.

Frage:
Was ist falsch an diesem Beweis? [1]

[1] Diese Aufgabe stammt aus Kapitel 1.3 des Lehrbuchs von Matousek/Nesetril. Das Lesen des gesamten Kapitels ist empfehlenswert.