Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap.6: Kombinatorik

Referenzen zum Nacharbeiten:

Iwanowski / Lang 6
Beutelspacher 4 (außer Fixpunkte von Permutationen)
Meinel 8
Steger 1.1 – 1.3 (mit Bezug zur Schulnotation)

6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

6.1 Zählformeln für endliche Mengen

Bezeichnung der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M: |M|, #M

Zusammenhang zwischen den Elementzahlen von Schnittmengen, Vereinigungsmengen und den Einzelmengen:

Siebformel

$$\begin{aligned}\#(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k) = {} & \# M_1 + \ldots + \# M_k - \#(M_1 \cap M_2) - \#(M_1 \cap M_3) - \ldots - \#(M_{k-1} \cap M_k) \\ & + \#(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + \ldots + \#(M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k) - \ldots \\ & + (-1)^{k-1} \#(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k)\end{aligned}$$

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{k} M_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \# M_i - \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{k} \#(M_{i_1} \cap M_{i_2}) + \ldots + (-1)^{l-1} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_l = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_l}}^{k} \#\left(\bigcap_{j=1}^{l} M_{i_j}\right) + \ldots + (-1)^{k-1} \#\left(\bigcap_{i=1}^{k} M_i\right)$$

6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

6.1 Zählformeln für endliche Mengen

Zusammenhang zwischen den Elementzahlen von Mengen und ihrem Kreuzprodukt:

$$\# (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k) = \# M_1 \cdot \dots \cdot \# M_k$$

Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge: n^k

Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge: $n!$

(Anzahl der Permutationen)

6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

6.1 Zählformeln für endliche Mengen

Zusammenhang zwischen der Elementzahl einer Menge und der Anzahl ihrer Teilmengen:

$$\# P(M) = 2^{\# M}$$

Zusammenhang zwischen der Elementzahl n einer Menge und der Anzahl ihrer k-elementigen Teilmengen:

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

(Binomialkoeffizient)

6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

6.1 Zählformeln für endliche Mengen

Zusammenhang zwischen Binomialkoeffizient und binomischer Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i$$

Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalsches Dreieck: Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten

Bilde für n = 0, 1, 2, ... nacheinander die Reihe der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$:

Verwende für jedes n die Regel $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

und berechne die $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$ aus den $\binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \ldots, \binom{n-1}{n-1}$ nach der rekursiven Formel

6. Kombinatorik

6.2 Permutationen

Eine n-Permutation ist eine bijektive Abbildung *f* von einer n-elementigen Menge in sich selbst:

$$f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \qquad i = j \Leftrightarrow f(i) = f(j)$$

Darstellungsweise von Permutationen:

Permutationstabelle $\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ f(1) & f(2) \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ **Bsp.:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Anordnung $f(1) \quad f(2) \quad \ldots \quad f(n)$ $\qquad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

Zyklendarstellung (1 7 3 5) (2 6) (4) = (1 7 3 5) (2 6)

Die Zerlegung in Zyklen ist nicht eindeutig, nur die in *disjunkte* Zyklen maximaler Länge, wobei die zyklische Umstellung eines Zyklus als gleich angesehen wird.

Ein Zyklus der Länge 2 heißt *Transposition*

6. Kombinatorik

6.2 Permutationen

Hintereinanderschaltung (Komposition) von Permutationen:

$$(1\ 7\ 3\ 5)\ (2\ 6) \circ (1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 7\ 6) = (1\ 5\ 7\ 2\ 4\ 3)$$

- Die Komposition wird von *rechts nach links* ausgeführt.
- Das Operationssymbol $\circ$ kann in der Zyklendarstellung weggelassen werden,
  da die Zerlegung in disjunkte Zyklen auch als Komposition aufgefasst werden kann.

6. Kombinatorik

6.2 Permutationen

Zerlegung von Permutationen in Transpositionen:

Jede Permutation kann in eine Komposition von Transpositionen zerlegt werden:

$$(a_1 \ldots a_n) = (a_1\ a_n)\ (a_1\ a_{n-1}) \ldots (a_1\ a_2)$$

$$(1\ 7\ 3\ 5)\ (2\ 6) = (1\ 5)\ (1\ 3)\ (1\ 7)\ (2\ 6)$$

- Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, ebenfalls nicht die Anzahl von Transpositionen. Es gilt aber immer, dass Zerlegungen für dieselbe Permutation entweder *alle* eine gerade Anzahl oder *alle* eine ungerade Anzahl von Transpositionen haben.

- Gemäß ihrer Zerlegungseigenschaft in Transpositionen bezeichnet man eine *Permutation* als *gerade* oder *ungerade*.

6. Kombinatorik

6.2 Permutationen

Die Permutationsgruppe S_n:

- Die Menge aller n-Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, die **symmetrische Gruppe S_n**.

- Die symmetrische Gruppe ist nicht abelsch,
d.h. das Kommutativgesetz gilt nicht.

- Die Menge der geraden Permutationen bildet eine Untergruppe von S_n.
Sie heißt die **alternierende Gruppe A_n**.