Aufgabe 1)

Finden Sie zu folgendem Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.

Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an!

Geben Sie außerdem 2 zulässige Wertepaare für x und y an, sodass beim einen Paar der then-Block und beim anderen der else-Block durchlaufen wird.

V ⇔ **?**

```
x := y * y;

if x > y
  then

    x := 1 / y
  else

    y := 1 / y
```

N ⇔ **x = y**

Aufgabe 2)

Berechnen Sie zu der gegebenen Vorbedingung φ die stärkste Nachbedingung ψ:

a) Gegeben sei:

```
x > 0                    φ
if (y>0)
  then
    y := x * x



  else
    x := y * y



Nachbedingung            ψ
```

b) Gegeben sei:

```
x * y = 1                φ
if (y>0)
  then
    y := x / y


  else
    x := x * y



Nachbedingung            ψ
```

Aufgabe 3)

Betrachten Sie folgendes Programm:

```
{ n,f,k ∈ N }          φ

f := 1;
k := n;

while(k > 0) do
  begin
     k := k - 1;
     f := k • f;
  end

{ Nachbedingung }     ψ
```

a) Formulieren Sie die Invariantenbedingungen, die für jeden Schleifendurchlauf gültig sind. Beweisen Sie das durch vollständige Induktion.

b) Zeigen Sie, dass dann die Schleife irgendwann terminiert (wann genau?). Formulieren und beweisen Sie direkt unter Verwendung von a), was diese dann berechnet hat.

c) Verändern Sie die Abbruchbedingung der Schleife so, dass das Programm eine Fakultät berechnet. Welche Fakultät berechnet das Programm genau? Beweisen Sie auch das unter Verwendung von a)

Aufgabe 4)

Betrachten Sie folgendes Programm:

```
Gegeben seien n Zahlen a[1] ... a[n] ∈ ℚ.

m := 0;
k := 0;
while (k < n) do
  begin
    m := k * m;
    k := k + 1;
    m := (m + a[k])/k ;
  end
```

a) Geben Sie die Invariantenbedingungen m_i und k_i an, die nach jedem Schleifendurchlauf erfüllt sind! Brauchen Sie Vorbedingungen dafür?

b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Invariantenbedingungen von a) mit vollständiger Induktion!

c) Geben Sie an, nach wie vielen Durchläufen die Schleife abbricht und folgern Sie mit Hilfe von a) eine Nachbedingung für m. Falls Sie in a) eine Vorbedingung formuliert haben, dürfen Sie diese weiterhin benutzen!

Aufgabe 5)

Zeigen Sie, dass das folgende Programm DIV und MOD ausrechnet, indem Sie eine geeignete Invariantenbedingung für die Schleife formulieren und mit vollständiger Induktion beweisen und daraus die am Ende angegebene Nachbedingung folgern:

```
(x ≥ 0) ∧ (y > 0) ∧ x,y ∈ ℤ          φ

div := 0;
mod := x;
while mod ≥ y do
   begin
      mod := mod - y;
      div := div + 1;
   end

(x = div * y + mod) ∧ (0 ≤ mod < y)    ψ
```

Tipp: Die Invariantenbedingung ist ein Teil der Nachbedingung. Vergleichen Sie diese Aufgabe auch mit Aufgabe 2c) des 4. Übungsblatts.