NAME: ______________________ TUTOR: ______________________

DISKRETE MATHEMATIK, ANWENDUNGSVORLESUNG SS 2013

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Übungsblatt 06 (5 Aufgaben) S.1/3

Aufgabe 1)

Betrachten Sie folgendes Programm:

```
{ n,f,k ∈ N }          φ

f := 0;
k := n;

while(k > 0) do
  begin
     k := k - 1;
     f := k + f;
  end

{ Nachbedingung }     ψ
```

a) Formulieren Sie die Invariantenbedingungen, die für jeden Schleifendurchlauf gültig sind. Beweisen Sie das durch vollständige Induktion.

b) Zeigen Sie, dass dann die Schleife irgendwann terminiert (wann genau?). Formulieren und beweisen Sie direkt unter Verwendung von a), was diese dann berechnet hat.

Aufgabe 2) (Klausuraufgabe SS 2010)

Gegeben sei der folgende Programmausschnitt:

```
{n > 0 vom Typ integer}
k := 0; s := 1;
while (k < n) do
begin
   k := s - 1;
   s := s + 1;
end
```

a) Formulieren Sie Bedingungen für k und s, die nach dem i-ten Schleifendurchlauf erfüllt sind.

b) Beweisen Sie die Bedingungen aus a) mit vollständiger Induktion über i.

c) Geben Sie Nachbedingungen für k und s an.

d) Begründen Sie die Aussage von c): Hierfür dürfen Sie alles bisher Gezeigte verwenden.

Aufgabe 3)

Was berechnet die folgende Prozedur? Was ist die schwächste Vorbedingung dafür? (Beweis!)

Hinweis: Beweis durch vollständige Induktion über einen der Parameter.

```
procedure rekursiv(m,n: integer): integer

begin
   if (n<=0)
      return 0
   else
      return m + rekursiv(m, n-1);
end;
```

Aufgabe 4)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
function f(x, y, z : N) : N;
begin
   if (y=0) then
       return x*z
   else
      return f(x+z, y-1, z);
end;
```

a) Was ist f(3,4,2)? *(Zwischenschritte angeben!)*

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über einen der Parameter, dass die Funktion $xz+yz^2$ berechnet.

Aufgabe 5)

a) Geben Sie für die folgenden Funktionen den Rekursionstypen an.
b) Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (bei primitiv, end- und linear rekursiv durch Angabe der entspr. Funktionsteile oder (falls Ihnen das nicht gelingt) in Worten, bei allgemein rekursiv durch eine Argumentation, warum die Funktion noch nicht einmal linear rekursiv ist).
c) Geben Sie für die endrekursiven Funktionen äquivalente nichtrekursive Prozeduren an!

i)

```
function ggT(x, y: N): N;
begin
   if (x MOD y = 0) then
      return y
   else
      return ggT(y, x MOD y);
end;
```

ii) Es sei f: N → N mit

$f(x) = 0$ für $x = 0$
$f(x) = x^{f(x \text{ DIV } 3)}$ sonst.

Zusatzfrage: Was ist f (31)?

iii)

```
f ( x : N ) : N
begin
   if (x > 100) then
      return x-10
   else
      return f(f(x+11));
end
```

Zusatzfrage: Berechnen Sie f(80), f(85) und f(90)!
Was würden Sie daraus für f(x) im allgemeinen vermuten?

iv) Es sei f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$f(x) = 1$ für $x = 1$
$f(x) = f(x/2)$ für gerade x
$f(x) = f(3x+1)$ für ungerade x.

Zusatzfrage: Berechnen Sie f(10), f(15) und f(20)!
Was würden Sie daraus für f(x) im Allgemeinen vermuten?
Statt eines Beweises sollten Sie lieber nach Ulam-Collatz googeln!