Zentrenprobleme

Vortragender:

Niklas Kolbe

Veranstaltung:

Logistik-Seminar im SS2012 von Prof. Dr. Iwanowski

Überblick

1. Einleitung: Was sind Zentrenprobleme?
    1.1 Klassifizierung von Zentrenproblemen
    1.2 Unterschiede zum Warehouse-Location-Problem
2. Knotenzentren (diskretes Modell)
    2.1 Bestimmung von 1-Zentren
    2.2 Bestimmung von p-Zentren
3. Absolute Zentren (semidiskretes Modell)
    3.1 Bestimmung von 1-Zentren
    3.2 Bestimmung von p-Zentren
4. Zusammenfassung

1. Einleitung

- Minimax-Zielsetzung:

Ein Punkt des Graphen ist so zu bestimmen, sodass der längste Weg zum Erreichen eines Knotens möglichst kurz wird.

$$r(q_z) = \min\{\max\{\mathrm{d(q,j)}\}\}$$

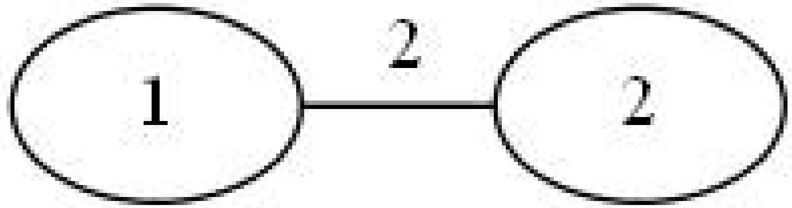
- Motivation
  - Sehr häufig untersuchtes Standortproblem
  - Hohe Bedeutung „günstiger“ Standorte
- Ziel des Vortrags
  - Ausprägungsformen von Zentren verdeutlichen
  - Vorstellung geeigneter Lösungsverfahren
  - Erläuterung und Verständnisförderung durch Beispiele

1.1 Klassifizierung von Zentrenproblemen

- Anzahl zu bestimmender Zentren
  - 1-Zentrum
  - p-Zentren
- Anzahl potentieller Standorte
  - Knotenzentrum
  - Absolutes Zentrum
- Art des Graphen
  - Gerichtet / ungerichtet
  - Knotenbewertet / nicht-knotenbewertet

1.2 Bezug zu Warehouse-Location-Problemen

- Knotenzentren haben große Ähnlichkeiten zu Warehouse-Location-Problemen
  - Branch-and-Bound-Verfahren
- Eigenschaften absoluter Mediane gelten nicht analog für absolute Zentren
  - Zentren können sich auch auf Kanten des Graphen befinden



2. Knotenzentren (diskretes Modell)

2.1 Bestimmung von 1-Zentren

- Vorgehen
- Beispiel
- Knotenbewerteter und gerichteter Graph

2.2 Bestimmung von p-Zentren

- Gitternetzheuristik
- Beispiel

2.1 Bestimmung eines Knotenzentrums

Vorgehen:

1) Berechnung der kürzesten Wege zwischen den Knoten

$$d(i,j)$$

2) Bestimmung des Radius jedes Knotens (der längste der kürzesten Wege zu den anderen Knoten)

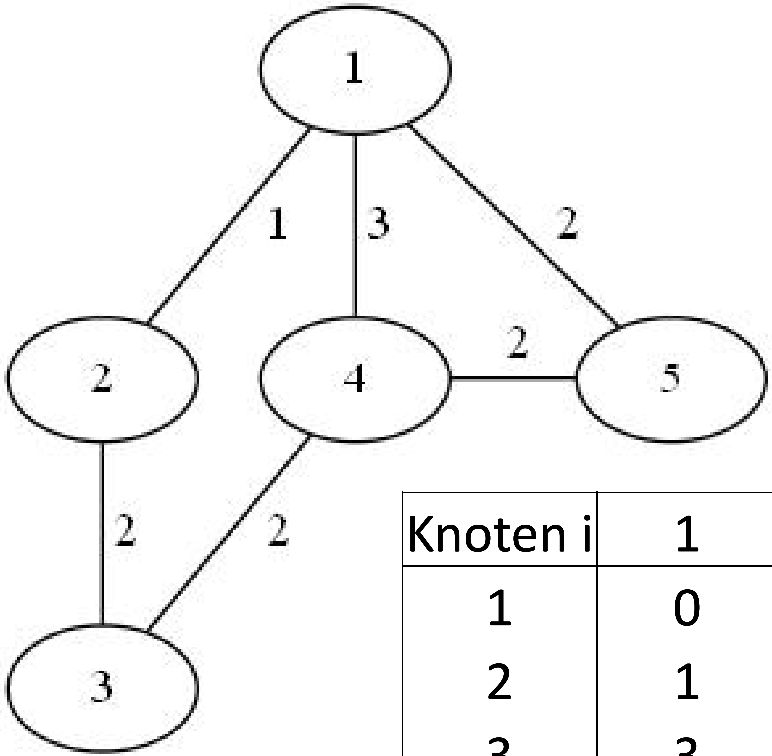
$$r(i) = \max_{j \in V}\{d(i,j)\}$$

3) Der Knoten mit dem kleinsten Radius ist das Knotenzentrum des Graphen

$$r(i_z) = \min_{i \in V}\{r(i)\}$$

2.1 Bestimmung eines Knotenzentrums

Beispiel:



$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Knoten i	1	2	3	4	5	r(i)
1	0	1	**3**	**3**	2	**<u>3</u>**
2	1	0	2	**4**	3	4
3	3	2	0	2	**4**	4
4	3	**4**	2	0	2	4
5	2	3	**4**	2	0	4

2.1 Bestimmung eines Knotenzentrums

Knotenbewerteter Graph:

- Gewichtung durch Knotenbewertung

$$r(i_z) = \min_{i \in V}\{\max_{j \in V}\{d(i,j) * b_j\}\}$$

Gerichteter Graph:

- Out-Zentrum $\quad r_{out}(h_z) = \min_{i \in V}\{\max_{j \in V}\{d(i,j)\}\}$
- In-Zentrum $\quad r_{in}(k_z) = \min_{i \in V}\{\max_{j \in V}\{d(j,i)\}\}$
- Zentrum $\quad r_{inout}(i_z) = \min_{i \in V}\{\max_{j \in V}\{d(i,j) + d(j,i)\}\}$

2.2 Bestimmung von p-Knotenzentren

Zielfunktion: $z = \max_{i,k \in V} \{d(i,k) * x_{ik}\} \rightarrow min!$

Nebenbedingungen:

1) Es werden genau p-Zentren eingerichtet: $\sum_{k \in V} y_k = p$

2) Jeder Knoten i muss an genau ein Zentrum k angeschlossen werden: $\sum_{k \in V} x_{ik} = 1$

3) Ein Knoten kann nur an einen anderen Knoten angeschlossen werden, wenn dieser ein Zentrum ist: $y_k \geq x_{ik}$

4) Binaritätsbedingung: $x_{ik}, y_k \in \{0,1\}$

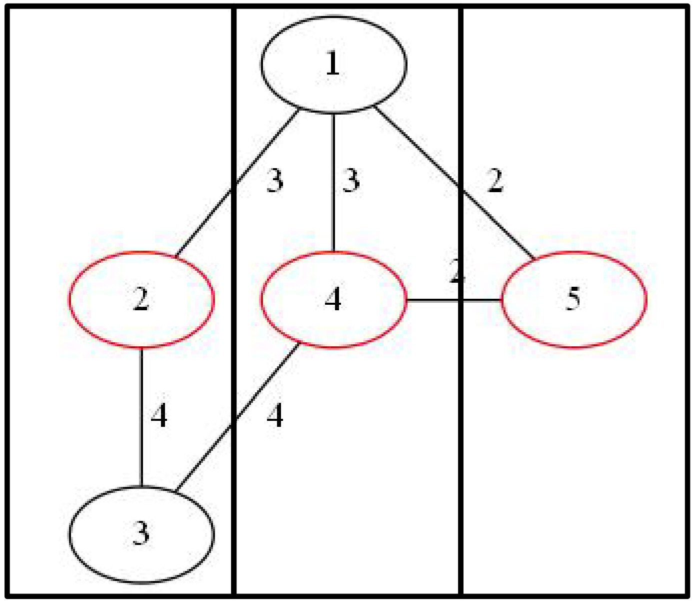
2.2 Bestimmung von p-Knotenzentren

Gitternetzheuristik:

1) Gitter mit p gleich großen Rechtecken über den Graphen
2) Der nächste Knoten zum Mittelpunkt jedes Rechtecks wird vorläufiges Zentrum
3) Zwischen benachbarten Gitterfeldern wird geprüft, ob ohne Verschlechterung ein Zentrum geschlossen werden kann
4) Neusetzen geschlossener Zentren in den Knoten mit der größten Distanz zum nächstgelegenem Zentrum
5) Verbesserung durch SWAP-Center Heuristik möglich

2.2 Bestimmung von p-Knotenzentren

Beispiel: Errichtung von 3 Zentren



- Maximale Distanz: 4

➔ Zentrum 4 kann geschlossen werden

- Neusetzen des Zentrums in Knoten 3, neue Distanz: 2

3. Absolute Zentren (semidiskretes Modell)

3.1 Bestimmung von 1-Zentren

- Vorgehensweise
- Bestimmung lokaler Zentren
  - Graphische Lösung
  - Iterationsverfahren
- Obere und untere Schranke für Radien
- vollständiges Verfahren
- Ansätze für knotenbewertete Graphen

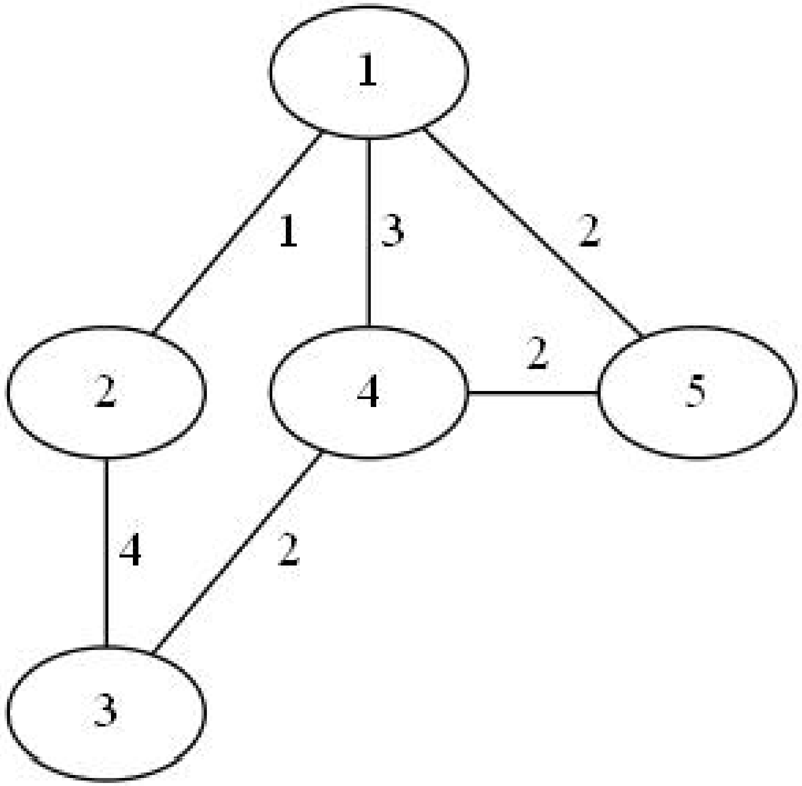
3.2 Bestimmung von p-Zentren

- Allgemein
- Skizzierung eines Lösungsverfahren

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Vorgehensweise:

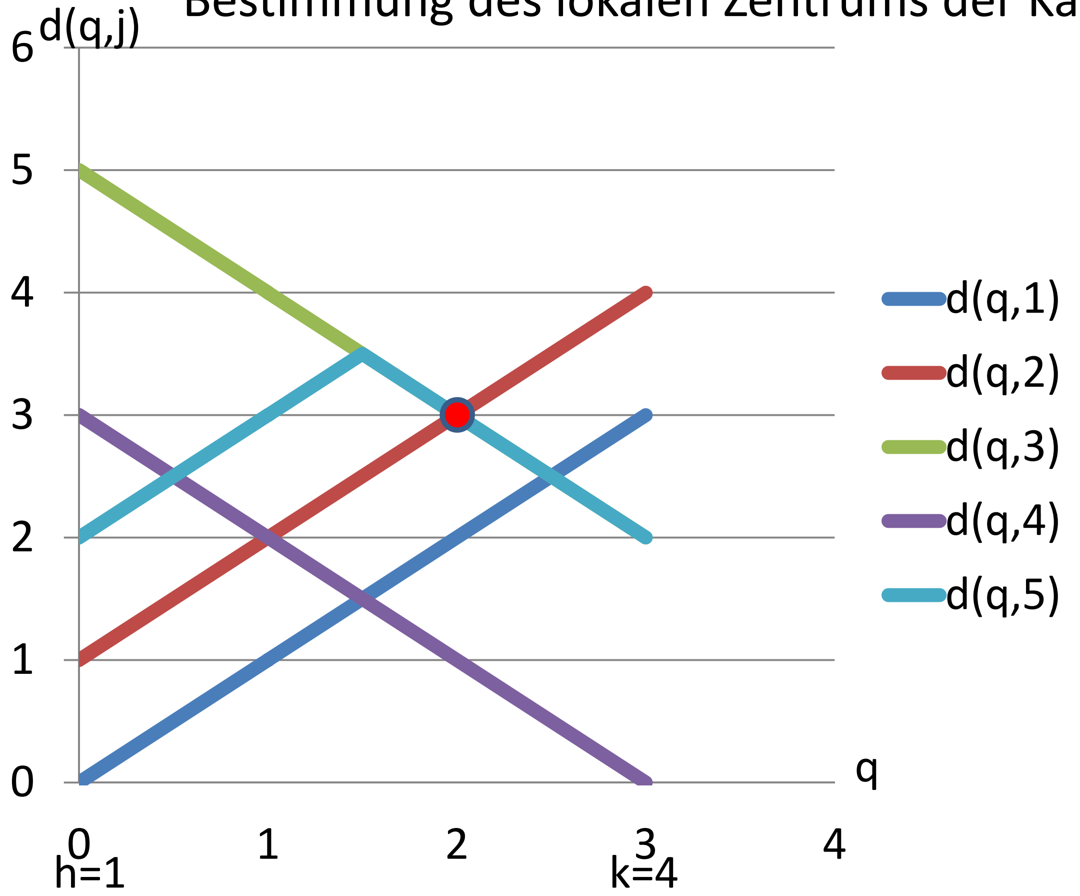
1) Bestimmung des *lokalen Zentrums* jeder Kante des Graphen
2) Bestimmung des *absoluten Zentrums* des Graphen

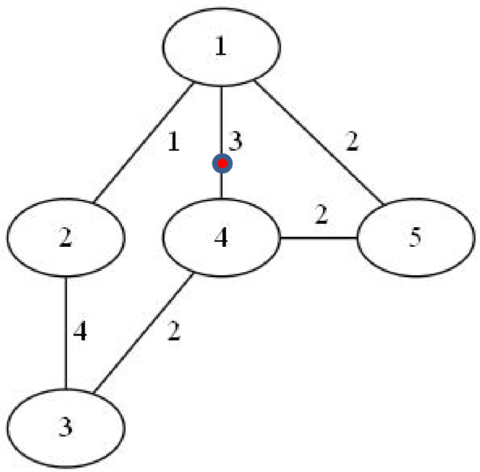


3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: graphisch

Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k]= [1,4]





Lokaler Radius der Kante: 3
2 LE von Knoten 1 entfernt

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Vorgehen für die Kante [h,k]:

1) Sortierung aller Knoten j nach monoton abnehmender Entfernung zu h

   Das aktuelle Zentrum befindet sich in h

2) Über sortierte Knoten iterieren:

   - Haben d(q,j) und d(q,i) einen Schnittpunkt?

     j: aktueller Knoten; i: Knoten mit dem der aktuellen lokalen Radius ermittelt wurde

   - Wenn ja: Berechnung des Schnittpunktes

     Ist y-Wert kleiner als der aktuelle Radius?

     ➔ neues aktuelles lokales Zentrum

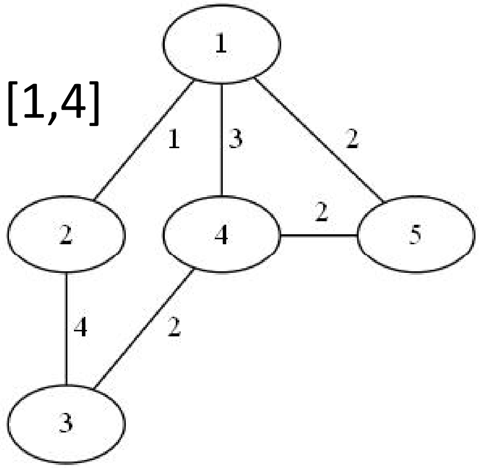
3) Überprüfe, ob das lokale Zentrum im Knoten k liegt

4) Ergebnis: lokales Zentrum und dessen Radius

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]



1) Sortierung der Knoten (Iteration t=1):

	$j_1 = 3$	$j_2 = 4$	$j_3 = 5$	$j_4 = 2$	$j_5 = 1$
$d(1, j_t)$	5	3	2	1	0

aktueller lokaler Radius $r(\overline{q}) = d(h, j_1) = 5$

aktuelles lokales Zentrum in Knoten 1 $\overline{q} = 0$

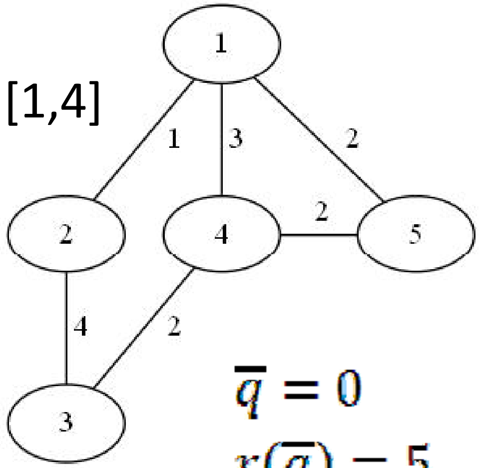
Knoten, mit dem der aktuelle lokale Radius ermittelt wurde: $i = 3$

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]

2) Iteration über die Knoten



$\overline{q} = 0$

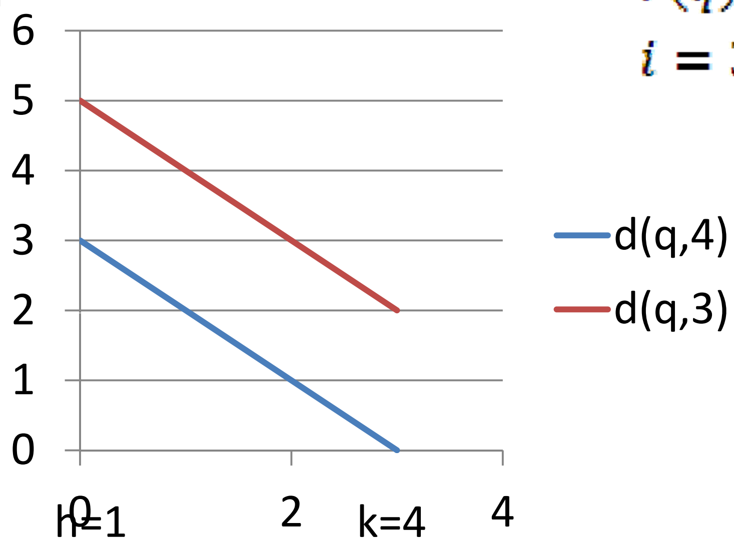
$r(\overline{q}) = 5$

$i = 3$

__Iteration t = 2:__ $j_2 = 4$

Haben $d(q, j_t) = d(q,4)$

und $d(q,i) = d(q,3)$ einen Schnittpunkt?



Falls $d(j_t, k) \leq d(i,k)$ gilt, haben die Funktionen keinen Schnittpunkt.

$$d(4,4) \leq d(3,4)$$

Da $0 \leq 2$

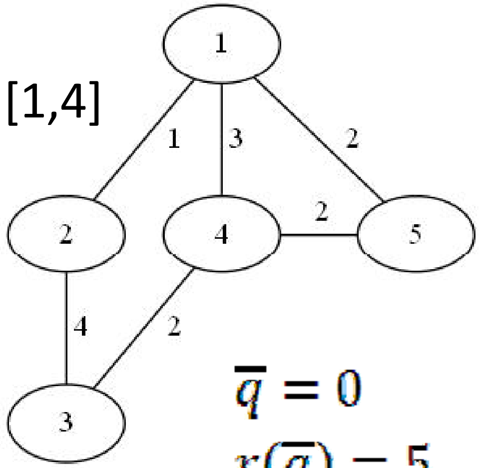
gehe zur nächsten Iteration.

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]

2) Iteration über die Knoten



$\overline{q} = 0$

$r(\overline{q}) = 5$

$i = 3$

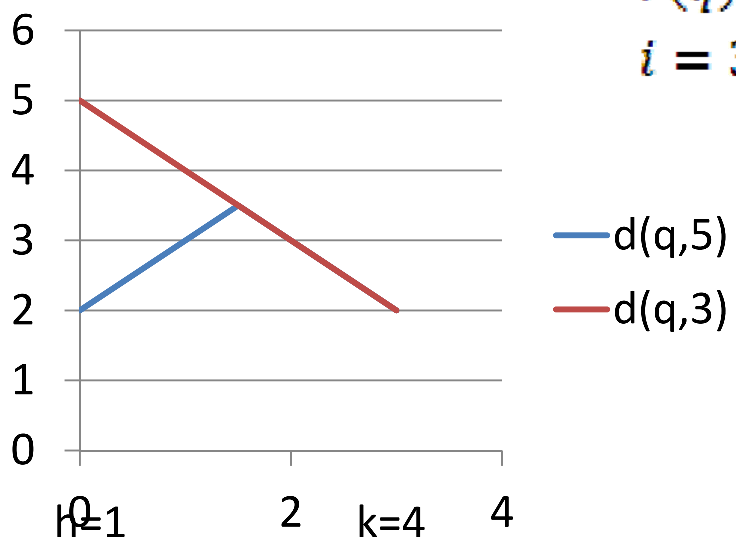
<u>**Iteration t = 3:**</u> $j_3 = 5$

Falls $d(j_t, k) \leq d(i, k)$ gilt, haben die Funktionen keinen Schnittpunkt.

$$d(5,4) \leq d(3,4)$$

Da $2 \leq 2$

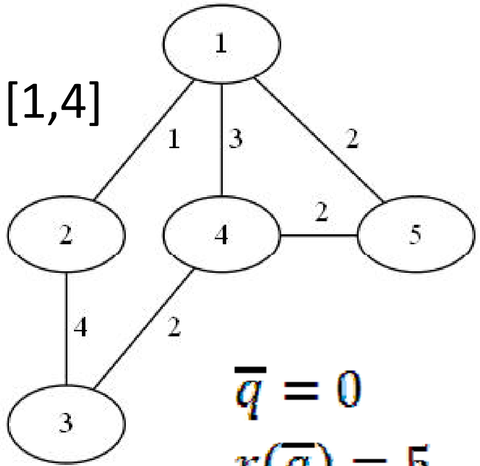
gehe zur nächsten Iteration.



3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]



2) Iteration über die Knoten

__**Iteration t = 4:**__ $j_4 = 2 \quad d(2,4) > d(3,4)$

$4 > 2$ ➔ Schnittpunkt vorhanden!

$\bar{q} = 0$

$r(\bar{q}) = 5$

$i = 3$

Berechnung des Schnittpunktes:

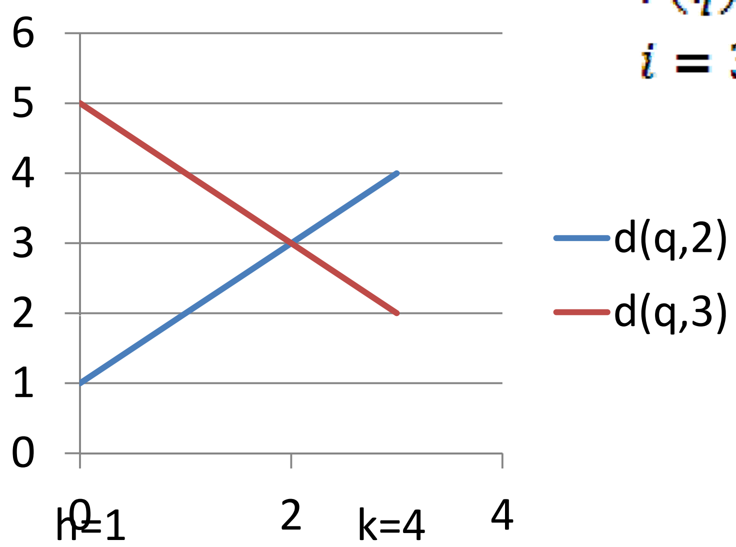
$$y = \frac{d(h,j_t) + d(i,k) + d(h,k)}{2}$$

$$y = \frac{d(1,2) + d(3,4) + d(1,4)}{2}$$

$$y = \frac{1+2+3}{2} = 3$$

➔ $r(\bar{q}) = 3 \qquad i = 2$

$\bar{q} = y - d(h,j_t) = 3 - 1 = 2$

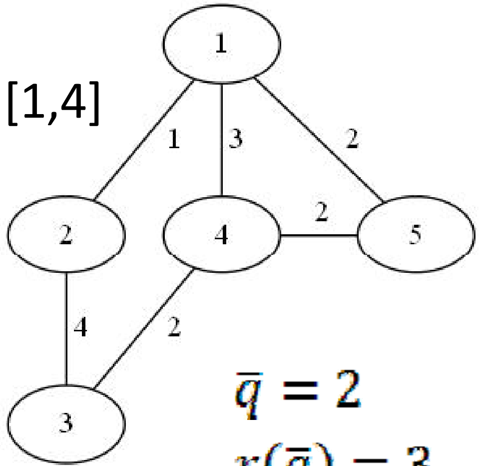


3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]

2) Iteration über die Knoten



$\bar{q} = 2$

$r(\bar{q}) = 3$

$i = 2$

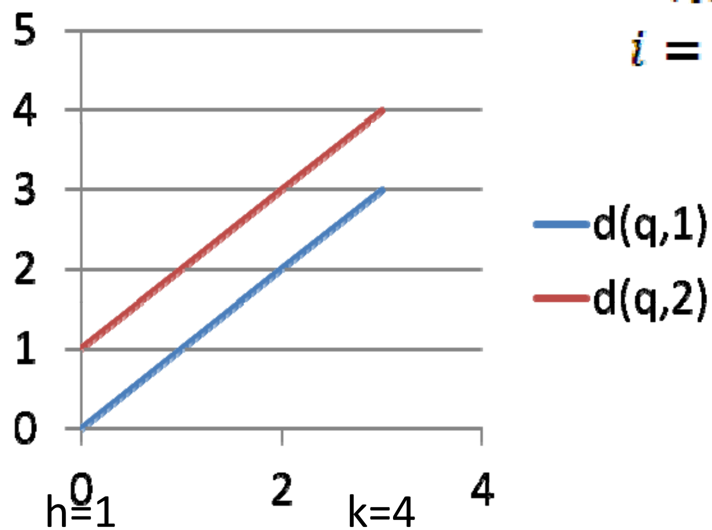
<u>**Iteration t = 5:**</u> $j_5 = 1$

Falls $d(j_t, k) \leq d(i, k)$ gilt, haben die Funktionen keinen Schnittpunkt.

$$d(1,4) \leq d(2,4)$$

Da $3 \leq 4$

gehe zur nächsten Iteration.



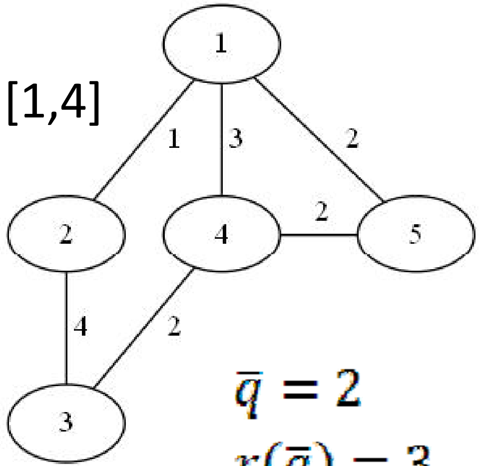
3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]

3) Überprüfe, ob das lokale Zentrum im Knoten k liegt

<u>**Iteration t = 6:**</u>



$\bar{q} = 2$

$r(\bar{q}) = 3$

$i = 2$

Falls $d(i,k) < r(\bar{q})$ gilt, liegt das lokale Zentrum im Knoten k.

$$d(2{,}4) \geq r(\bar{q})$$

Da $4 \geq 3$ liegt das lokale Zentrum nicht im Knoten k.

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

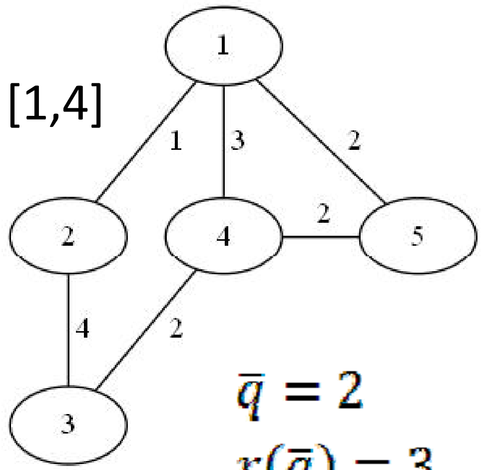
Bestimmung eines lokalen Zentrums: Iterationsverfahren

Beispiel: Bestimmung des lokalen Zentrums der Kante [h,k] = [1,4]

4) Ergebnis:

$$r(q_{14}) = r(\bar{q}) = 3$$

$$q_{14} = \bar{q} = 2$$



$\bar{q} = 2$

$r(\bar{q}) = 3$

$i = 2$

Das lokale Zentrum ist 2 LE von Knoten 1 entfernt.

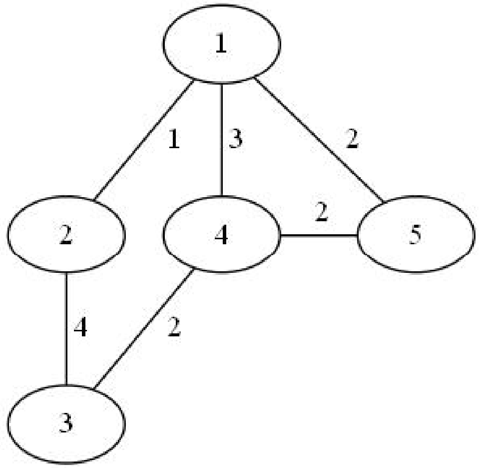
Der lokale Radius beträgt 3.

Rechenaufwand: $O(n * \log n)$

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Ermittlung unterer Schranken für lokale Radien

$$\underline{r}(q_{hk}) = \max_{j \in V} \min\{d(h,j), d(k,j)\}$$



Beispiel: Bestimmung der unteren Schranke des lokalen Radius der Kante [h,k] = [1,2]

Knoten j	1	2	3	4	5
d(1,j)	**0**	1	5	**3**	**2**
d(2,j)	1	**0**	**<u>4</u>**	4	3

Der lokale Radius der Kante [1,2] hat mindestens den Wert 4.

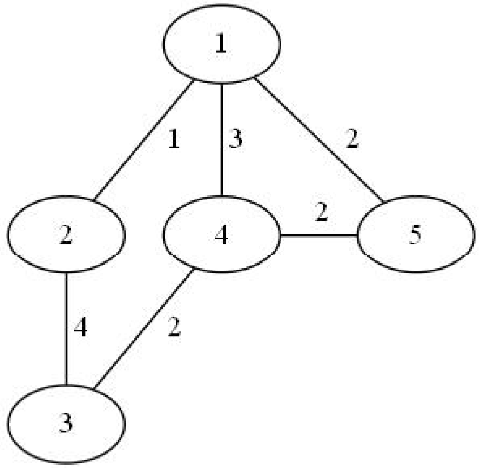
$$\underline{r}(q_{12}) = 4$$

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Ermittlung oberer Schranken für den absoluten Radius

$$\overline{r}(q_{hk}) = \underline{r}(q_{hk}) + 0{,}5 * d(h,k)$$

$$\overline{r}(q_z) = \min_{h,k \in E} \{\overline{r}(q_{hk})\}$$



Beispiel: Bestimmung der unteren Schranke des
lokalen Radius der Kante [h,k] = [1,2]

$$\overline{r}(q_{12}) = \underline{r}(q_{12}) + 0{,}5 * d(1{,}2) = 4 + 0{,}5 * 1$$
$$= 4{,}5$$

Der lokale Radius der Kante [1,2] hat höchstens den Wert 4,5.

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Vollständiges Verfahren

1) Bestimmung der unteren Schranke lokaler Radien
2) Bestimmung der oberen Schranke des absoluten Radius
3) Alle Kanten mit $\underline{r}(q_{hk}) < \overline{r}(q_z)$ werden nach monoton wachsender $\underline{r}(q_{hk})$ untersucht:
   - Bestimmung des lokalen Zentrums mit dem Iterationsverfahren von Minieka
   - Ist der Radius des gefundenen Zentrums kleiner als $\overline{r}(q_z)$, so ist dies das neue aktuelle absolute Zentrum
   - Setze die obere Schranke $\overline{r}(q_z)$ herunter auf den Radius des neu gefundenen Zentrums
4) Ergebnis: Erfüllen keine Kanten mehr die Bedingung $\underline{r}(q_{hk}) < \overline{r}(q_z)$, ist das aktuelle Zentrum q_z das absolute Zentrum des Graphen

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

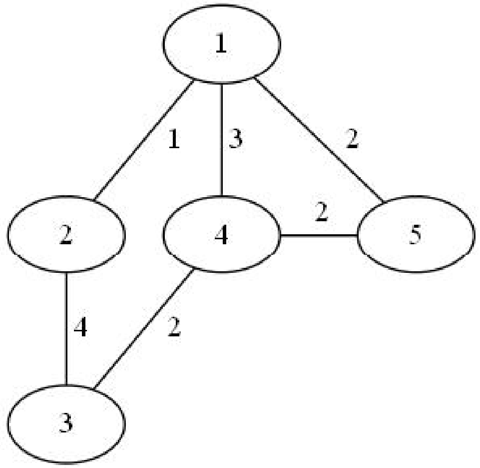
Vollständiges Verfahren

Beispiel: Bestimmung des absoluten Zentrums

1) Ermittlung der unteren Schranken der lokalen Radien

$$\underline{r}(q_{12}) = 4;\ \underline{r}(q_{14}) = 2;\ \underline{r}(q_{15}) = 4;$$

$$\underline{r}(q_{23}) = 3;\ \underline{r}(q_{34}) = 4;\ \underline{r}(q_{45}) = 3$$



2) Ermittlung der oberen Schranke des absoluten Radius

$$\overline{r}(q_{12}) = 4{,}5;\ \overline{r}(q_{14}) = 3{,}5;\ \overline{r}(q_{15}) = 5;$$

$$\overline{r}(q_{23}) = 5;\ \overline{r}(q_{34}) = 5;\ \overline{r}(q_{45}) = 4$$

$$\overline{r}(q_z) = 3{,}5$$

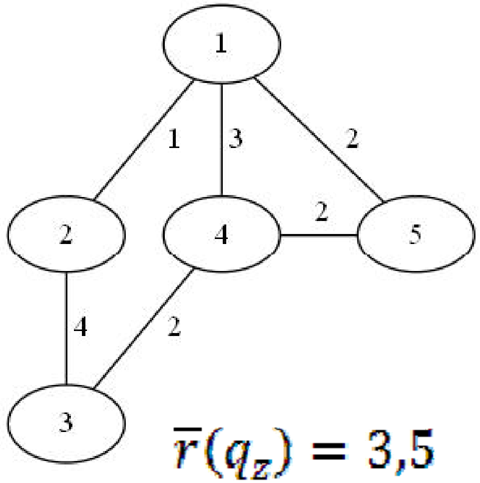
3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Vollständiges Verfahren

Beispiel: Bestimmung des absoluten Zentrums

3) $\{[1,4],[2,3],[4,5]\}$

Bestimmung des lokalen Zentrum der Kante [h,k] = [1,4]:



$\overline{r}(q_z) = 3{,}5$

$$r(q_{14}) = 3$$

$$q_{14} = 2$$

Da $r(q_{14}) < \overline{r}(q_z)$ ist das lokale Zentrum der Kante [1,4] neues absolutes Zentrum:

$$q_z = q_{hk} = 2$$

$$\overline{r}(q_z) = r(q_{hk}) = 3$$

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Vollständiges Verfahren

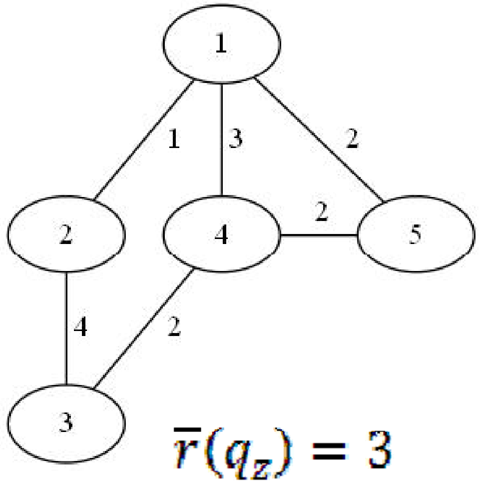
Beispiel: Bestimmung des absoluten Zentrums

4) Ergebnis:

$\{[2,3],[4,5]\}$

$\underline{r}(q_{23}) = 3$

$\underline{r}(q_{45}) = 3$



$\overline{r}(q_z) = 3$

Da für keine der Kanten mehr die Bedingung $\underline{r}(q_{hk}) < \overline{r}(q_z)$ gilt, haben wir das absolute Zentrum bereits gefunden.

Das absolute Zentrum des Graphen befindet sich auf der Kante [1,4] 2 LE von Knoten 1 entfernt.

Der absolute Radius beträgt 3.

Rechenaufwand: $O(m * n + n^2 * \log n)$

3.1 Bestimmung eines absoluten Zentrums

Zentrum im knotenbewerteten Graph

- Gleiches Verfahrensprinzip
- Graphisches Verfahren zur Bestimmung des lokalen Zentrums:
  - Die Distanzfunktionen müssen mit b_j multipliziert werden
- Iterationsverfahren von Minieka:
  - Deutlich aufwendiger
  - Steigungen der Funktionen nun unterschiedlich
- Untere Schranke der lokalen Zentren:
  $$\underline{r}(q_{hk}) = \max_{j \in V}\{b_j * \min\{d(h,j), d(k,j)\}\}$$
- Obere Schranke der lokalen Zentren:
  $$\overline{r}(q_{hk}) = \underline{r}(q_{hk}) + 0{,}5 * b_j * d(h,k)$$

3.2 Bestimmung absoluter p-Zentren

Allgemein

- Außerordentlich schwieriges mathematisches Optimierungsproblem
- Dennoch wenige Heuristiken
- Baut auf den bisherigen Überlegungen auf
- Formulierung eines Set-Covering-Problems
    - Minimiere die Anzahl der Zentren

  unter den Nebenbedingungen
    - Jeder Knoten muss von mindestens einem Zentrum bedient werden
    - Binaritätsbedingung für die Entscheidungsvariable

3.2 Bestimmung absoluter p-Zentren

Skizzierung eines Lösungsverfahren

1) Bestimmung aller potentiellen Zentren
   - Bestimmung der absoluten 1-Zentren aller Untergraphen des Graphen
2) Iteration: Lösung eines Set-Covering-Problems
   - Set-Covering-Matrix: 1, wenn der Knoten mit dem aktuellem Radius von einem Zentrum überdeckt wird, sonst 0
   - Entscheidungsvariable gibt an, ob der untersuchte Knoten ein Zentrum ist
   - Es wird so lange nach einer neuen Lösung gesucht, bis das Set-Covering-Problem mehr als p Zentren benötigt
3) Die letzte gefundene Lösung liefert das absolute p-Zentrum des Graphen

4. Zusammenfassung

Was haben wir gelernt?

- Eigenschaften von Zentren in Graphen
- Bestimmung eines Knotenzentrums und p-Knotenzentren
  - Gerichtete und knotenbewertete Graphen
  - Gitternetzheuristik
- Bestimmung eines absoluten Zentrums
  - Lokale Zentren
  - Schranken für Radien
- Einblick in das Verfahren zur Bestimmung absoluter p-Zentren

Vertiefungsmöglichkeiten:

- Optimierungsmodell zur exakten Bestimmung von p-Knotenzentren
- Vertiefung des Verfahrens zur Bestimmung absoluter p-Zentren

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!