Briefträgerproblem

Seminarvortrag von Christoph Kröger

1 Was ist das Briefträgerproblem? 2
1.1 Erläuterungen 2
1.2 Eulers Brückenproblem 2
1.3 Simplex Algorithmus 3
1.4 Transport & Umladeproblem 4
2 Das Briefträgerproblem in der Graphentheorie 5
2.1 Lösungsmöglichkeiten 7
2.1.1 Erweiterung von gerichteten Graphen 7
2.1.2 Erweiterung von ungerichteten Graphen 8
2.1.3 Erweiterung von gemischten Graphen 9
2.1.4 Bestimmung von Eulerkreisen 12
2.2 Weitere Briefträgerprobleme 13
2.3 Beispiele aus der Praxis 14
2.3.1 Winterdienst im Staat Indiana 14
2.3.2 Deutsche Post – „Paket 2012“ 15
3 Quellen 15

1 Was ist das Briefträgerproblem?

Im englischen Sprachraum auch als „chinese postman problem“ bekannt, behandelt das Briefträgerproblem folgendes: Ein Briefträger hat die Aufgabe die Häuser in einem Stadtteil mit Post zu beliefern. In unseren Verkehrs- und Straßennetzen gibt es dabei diverse Vorschriften die das Befahren der Straßen regeln, genauso wie es doppel- oder mehrspurige Straßen gibt. Weiterhin existieren nicht selten Sackgassen oder Mehrfachkreuzungen die ein simples Abfahren der Straßen erheblich komplizieren.
Aus all diesen Gründen und um weiterhin noch andere Teilbereiche der Stadt zu erreichen, müssen Straßenabschnitte mehrfach befahren werden ohne dass dabei Post zugestellt wird. Es sind also unproduktive Teilstrecken vorhanden. Der Briefträger selbst, sowie sein Auftraggeber aus kostenkalkulatorischen Gründen, interessieren sich für einen minimalen Weg der jede zu bedienende Straßenseite mindestens einmal enthält.
Oder anders formuliert: Der Briefträger interessiert sich für einen Weg, der jede zu bedienende Straßen(seite) enthält, bei dem die unproduktiven Strecken so kurz wie möglich sind.

Das beschriebene Problem lässt sich leicht auf andere Teilgebiete übertragen. Als Beispiel ist hier das Ablesen von Strom- und Wasserzähler, die Müllabfuhr oder die Straßenreinigung zu nennen.
Benannt wurde das „chinese postman problem“ erstmals vom Chinesen Mei Ko Kwan im Jahre 1962.

Zur Lösung des Problems in der Graphentheorie ist es notwendig das Straßennetz in einem Graphen darzustellen.

1.1 Erläuterungen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über das Verfahren des Simplex Algorithmus und dessen Anwendung in der Logistik. Weiterhin soll eine Wiederholung des Eulerschen Brückenproblems besprochen werden.

1.1.1 Eulers Brückenproblem

Das Eulersche Brückenproblem geht auf das Königsberg im Jahre 1736 zurück. Zur damaligen Zeit gab es in Königsberg den neuen und den alten Pregel welche sich in der Innenstadt vereinten.
Über diese Flussläufe führten 7 Brücken. Es gilt in diesem Problem herauszufinden ob es einen Weg gibt, der über alle Brücken einmal führt und dann abschließend zum Ausgangsort zurückkehrt.

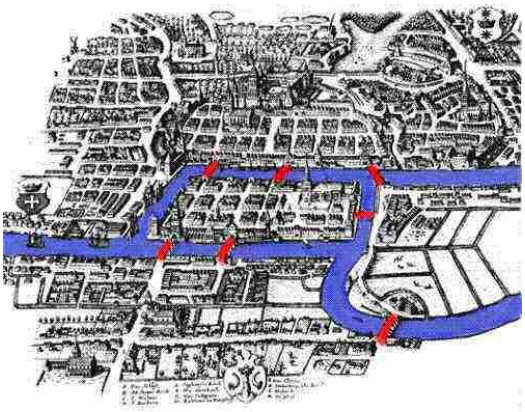

Abb. 2

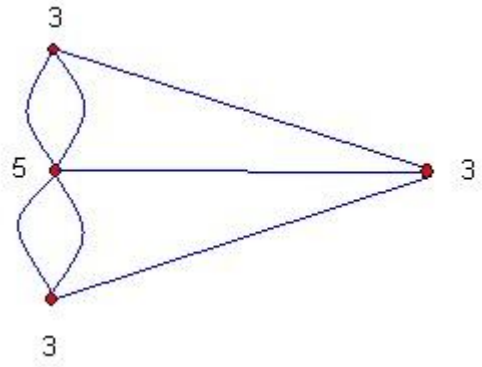

Abb. 1

Euler führte dieses Problem in die Graphentheorie über wie die Abb. 2 zeigt. Ein Graph enthält genau dann eine geschlossene Euler-Tour wenn der Grad jedes Knotens gerade ist. Am obigen Beispiel erkennen wir das dies nicht für das Königsberger Brückenproblem gilt.
Das Pendant zur geschlossenen ist die offene Euler-Tour. Sie ist dann gefunden wenn alle Kanten einmal passiert worden sind, aber der Ausgangspunkt nicht der Startpunkt ist. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn eine gerade Anzahl von Knoten einen ungeraden Knotengrad besitzen. Auch diese Bedingung ist beim Brückenproblem nicht erfüllt.

1.1.2 Simplex Algorithmus

Der Simplex Algorithmus ist ein Berechnungsverfahren zur Lösung linearer Optimierungsprobleme. Er wurde in seiner ursprünglichen Variante von Dantzig im Jahre 1947 entwickelt. Es handelt sich dabei um ein Pivotverfahren. Dabei wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, indem bei jedem Schritt, ausgewählte Variablen freigegeben werden. In der Phase I wird ein erster zulässiger Extremalpunkt bestimmt. Danach werden Schrittweise die benachbarten Extremalpunkte geprüft ob sie ein besseres Ergebnis liefern.

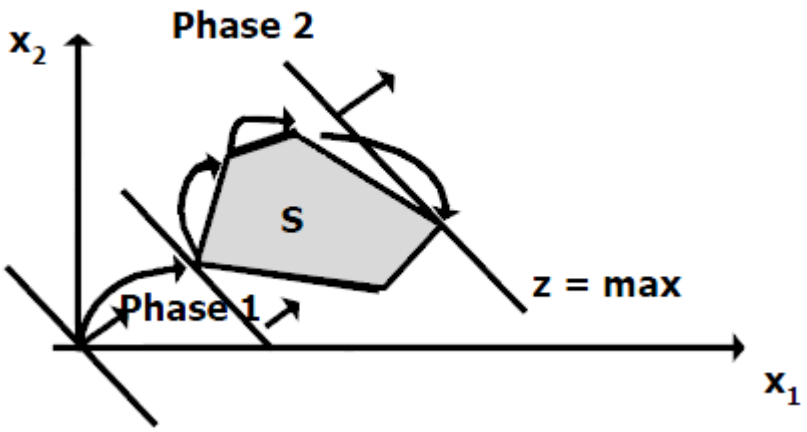

Abb. 3

1.1.3 Transport & Umladeproblem

Transportprobleme stammen vorwiegend aus der Logistik und wurden erstmals 1939 von Kantorovich untersucht und teilweise gelöst. Die klassische Formulierung der uns heute bekannten Transportprobleme geht auf Hitchcock(1941) und Koopmans(1949) zurück. Weitere Verfahrensverfeinerungen wurden u.a. von Dantzig, Charnes und Cooper(1954) eingebracht.
Bei Transportproblemen handelt es sich um eine spezielle Klasse der linearen Optimierungsaufgaben. Um die Problemstellung zu verdeutlichen folgt ein einfaches Beispiel:
5 Baustellen sollen von 4 Kiesgruben beliefert werden. Jede Kiesgrube hat dabei unterschiedliche Transportkosten zu jeder Baustelle.
Fragestellung: Wie viel Kies soll von welcher Grube zu welcher Baustelle gebracht werden?

Es ist nun möglich diese Beziehungen als ein lineares Optimierungsproblem darzustellen. Der Simplex-Algorithmus wird nun angewendet um ein optimales Ergebnis zu erzielen.

Das Umladeproblem ist wiederum ein Optimierungsproblem aus der Logistik. Es behandelt den Prozess des Transports vom Produzenten über sog. Umladestellen zum Nachfrager. Ziel ist es diese Transporte so kostenminimal wie möglich zu gestalten. Dabei kann es sein das Umladestellen genutzt werden können oder sogar genutzt werden müssen.
Als Beispiel ist hier die Logistik von Zeitungsverlagen zu nennen die von ihrer Druckerei große Pakete an einzelne Logistikzentren verschicken, diese teilen die Pakete an einzelne Verteilstationen auf, von wo aus die einzelnen Kioske beliefert werden.
Als weiteres Beispiel kann der Transport von Rohöl genannt werden, welcher über Pipelines, Schiffe oder Bahnstrecken transportiert werden kann, darf oder muss.

2 Das Briefträgerproblem in der Graphentheorie

Gehen wir nun davon aus, dass wir unser eingangs beschriebenes Problem des Briefträgers auf die Graphentheorie anwenden möchten. Dazu überführen wir einfache Straßen in Kanten, Straßen die zweimal zu befahren sind in zwei Kanten. Einbahnstraßen kennzeichnen wir durch einen Pfeil der die Durchfahrtsrichtung angibt. Als Beispiel wählen wir den folgenden Kartenausschnitt:

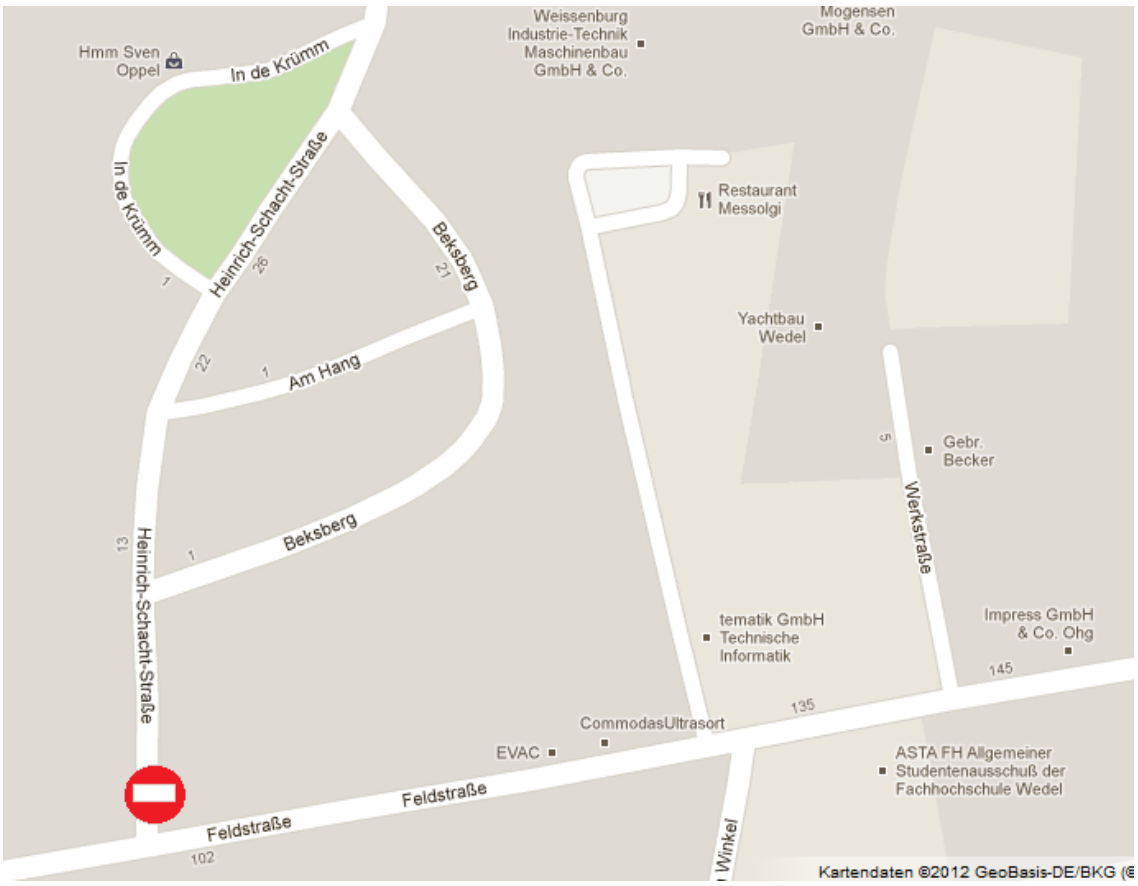

Abb. 4

Um in diesem Kartenausschnitt alle zuvor genannten „Varianten“ abzubilden fügen wir folgende Abschnitte hinzu:

- Die Feldstraße ist eine zweimal zu befahrende Straße
- Die Straße „Im Winkel“ wird nicht betrachtet
- „Heinrich-Schacht-Straße“ wird als Einbahnstraße behandelt

Daraus ergibt sich folgender Graph:

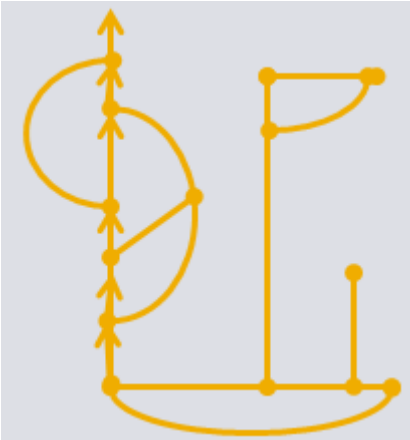

Abb. 5

Da wir nun in unserem Graph sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten finden, führen wir folgende Definitionen ein:

Definition 1.1: G = (V,E) heißt **ungerichteter Graph** $\Leftrightarrow$

- V ist eine endliche, nicht leere Menge von Knoten.
- E ist eine Menge von ein- und zweielementigen Teilmengen von V.
- E heißt Kantenmenge, ein Paar $\{u,v\} \in E$ heißt Kante.

Definition 1.2: G = (V,E) heißt **gerichteter Graph** $\Leftrightarrow$

- V ist eine endliche, nicht leere Menge von Knoten.
- $E \subseteq V \times V$ heißt Kantenmenge. Elemente von E heißen Kanten.
- Eine Kante (u,v) führt von Knoten u zu Knoten v.

Definition 1.3: **Graph** G = <V,E,P> heißt **gemischter Graph** $\Leftrightarrow$

- Neben der Knotenmenge V sowohl eine Menge E von Kanten als auch eine Menge P von Pfeilen besitzt. Weiterhin besitzt G eine Kosten- oder Längenbewertung $c: E \cup P \rightarrow R$, so schreibt man G = <V,E,P,c>.

Definition 1.4: Die Anzahl aller Kanten, die in einen Knoten hineinführen nennt man **Eingangsgrad** oder **positiver Grad**, die Menge aller hinausführender Kanten heißt **Ausgangsgrad** oder **negativer Grad** und die Differenz aus Eingangsgrad und Ausgangsgrad heißt **Grad** eines Graphen.

In der Praxis ist der Regelfall ein gemischter Graph, da es sehr selten ist einen Straßenbezirk zu finden in dem nur gerichtete(Einbahnstraßen) oder nur ungerichteten(ohne Sackgassen, oder Einbahnstraßen) Straßen vorhanden sind. Die Problemmenge der gerichteten und ungerichteten Graphen sind daher Spezialfälle des NP-schweren Briefträgerproblems der gemischten Graphen.

2.1 Lösungsmöglichkeiten

In diesem Kapitel sollen die Lösungsmöglichkeiten erläutert werden. Eine Variante ist die Erweiterung eines Graphen durch Verdoppelung von Kanten und/oder Pfeilen – sprich hinzufügen von unproduktiven Strecken - so dass ein neuer Euler-Graph entsteht. Eine andere Variante ist, dass bereits ein Euler-Graph existiert und dieser nur noch gefunden werden muss.

Wir beginnen mit der kostenminimalen Erweiterung von Eulergraphen, die unterschiedliche Herangehensweisen bei gerichteten, ungerichteten und gemischte Graphen hat.

2.1.1 Erweiterung von gerichteten Graphen

Zur Lösung von Problemen in gerichteten Graphen nehmen wir eine Methode der klassischen Transportprobleme. Dazu ermittelt man in einem Graphen(Abb. 6) zu jedem Knoten die Differenz aus Ausgangsgrad und Eingangsgrad. Ist das Ergebnis positiv so beginnen in diesem Knoten dementsprechend viele unproduktive Wege die in Knoten enden müssen die negative Werte aufweisen.
Um es anschaulicher zu beschreiben, nennen wir die Knoten mit positiven Wert „Angebotsknoten“ und die Knoten mit negativen Wert „Nachfrageknoten“.
Die Angebotsknoten werden in einem weiteren Graphen G‘(Abb. 7) jeweils durch eine Kante mit den Knoten der Nachfragemenge verbunden. Die Bewertung dieser Kanten entspricht dem kürzesten Weg zwischen beiden Knoten im Original Graphen.

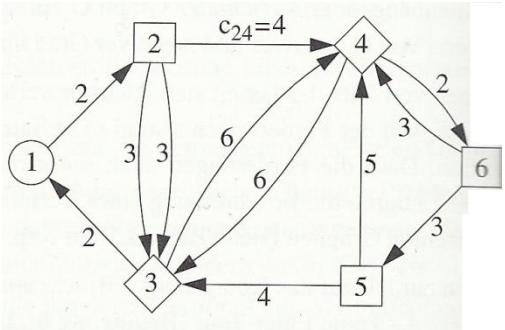

Abb. 6

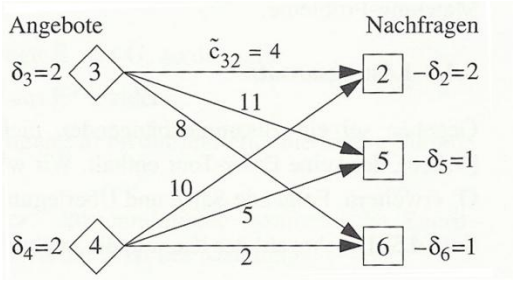

Abb. 7

Die ganzzahlige Lösung des Transportproblems mittels Simplex Algorithmus, besagt nun um wie viele und welche Kanten der ursprüngliche Graph ergänzt werden muss, damit daraus ein optimaler Graph entsteht. Die Summe dieser kürzesten Wege ergibt

dabei die Gesamtlänge der unproduktiven Strecken die in Kauf genommen werden muss.
Im obigen Beispiel bedeutet dies, dass die Strecken $x_{32} = 2 \Rightarrow (3,1),(1,2)$ zweimal, $x_{45} = 1 \Rightarrow (4,6),(6,5)$ einmal und $x_{46} = 1 \Rightarrow (4,6)$ einmal in Graph hinzugefügt werden muss. Für alle anderen $x_{ij} = 0$ und somit muss keine Kante erweitert werden.

2.1.2 Erweiterung von ungerichteten Graphen

Um eine kostenminimale Erweiterung eines ungerichteten Graphen durchzuführen stehen 2 unterschiedliche Methoden zur Verfügung:

1.) Bildung eines Hilfsgraphen der nur aus Knoten ungeraden Grades besteht und Lösung dieses Hilfsgraphen mit Hilfe eines Minimal-Kosten-Matching-Problems oder einem symmetrischen Zuordnungsproblems.
2.) Verallgemeinerung des MK-Matching-Problems und direktes ermitteln der kürzesten unproduktiven Kette.

Die Variante 1 besteht aus 2 Schritten. Dazu geht man wie folgt vor:

1 Schritt: Bilden eines Hilfsgraphen(Abb. 9) der nur aus Knoten ungeraden Grades besteht. Es werden alle Knoten dieses Hilfsgraphen verbunden. Als Bewertung werden die Kosten der kürzesten Verbindungen der beiden Punkte aus dem Ursprungsgraphen(Abb. 8) gewählt.

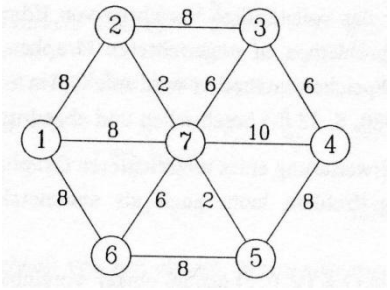

Abb. 9
Ursprungsgraph

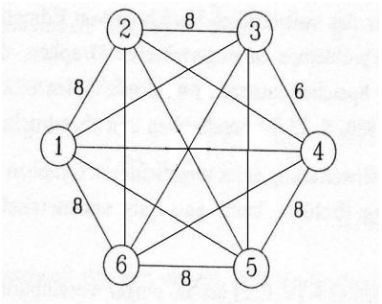

Abb. 8

Nun wird eine Teilmenge E* gesucht bei der jeder Knoten aus genau einer Kante aus E* besteht. Weiterhin soll keine Kante vorhanden sein die eine niedrigere Summe der Kantenbewertung als E* aufweist.

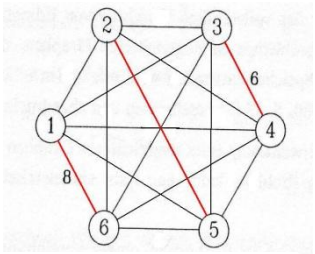

Abb. 10

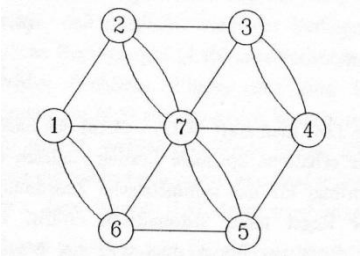

Abb. 11

Der Wert des Matchings ergibt sich aus der Summe der Kantenbewertungen von E*. Dieser Wert ist auch die Summe der unproduktiven Strecken in der kürzesten Briefträgertour im Ursprungsgraphen. E* wird nun als kostenminimales Matching bezeichnet.

2 Schritt: Die kürzesten Kanten aus E* werden im Ursprungsgraphen an den Kanten verdoppelt. Die Gesamtlänge der kürzesten Briefträgertour ergibt sich als Summe der Kantenbewertungen plus die unproduktiven Strecken.
Im obigen Beispiel besteht die Summe aus 8+2+2+6 = 18

Variante 2: „Verallgemeinerung des MK-Matching-Problems und direktes ermitteln der kürzesten unproduktiven Kette“ ist relativ komplex und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

2.1.3 Erweiterung von gemischten Graphen

Gemischte Graphen bestehen aus ungerichteten und gerichteten Graphen. Sie stellen somit die schwierigste Variante der Briefträgerprobleme dar. Dabei sind folgende Problemklassen zu unterscheiden:

Klasse I: Probleme in Graphen bei denen alle Graphen einen geraden Gesamtgrad besitzen sowie den gleichen Eingangs- wie Ausgangsgrad besitzen.

Klasse II: Graphen in denen sich alle Knoten mit einem geraden Gesamtgrad befinden, aber mindestens 1 Knoten nicht den gleichen Eingangs- wie Ausgangsgrad besitzt.

Klasse III: Alle übrigen Probleme.

Probleme der Klasse I lassen sich leicht lösen, da sie bereits einen Eulergraphen enthalten. Lediglich das Finden der vorhandenen kürzesten Briefträgertour stellt an dieser Stelle noch ein Problem dar.

Probleme der Klasse II lassen sich mit den nachfolgend beschriebenen Heuristiken lösen.

Kleinere Probleme der Klasse III lassen sich mittels einer linearen Optimierung lösen. Kappauf und Koehler(1979) und Ralphs(1993) haben solche Probleme als LOP beschrieben um sie so zu lösen. Weiterhin haben in den Jahren 1984 – 1996 „Christofides et al“ und „Yan und Thompson“ Verfahrensverfeinerungen entworfen um Probleme die in der Größenordnung $52 \leq V \leq 172$, $31 \leq P \leq 116$, $37 \leq E \leq 157$ zu lösen.

2.1.3.1 Mixed1 und Mixed2

Größere Probleme lassen sich nur mittels der beiden Verfahren Mixed1 oder Mixed2 lösen. Beide Verfahren verwenden die Prozeduren *ProzGerGrad* und *ProzEin=Aus.* Der Unterschied der beiden Verfahren ist lediglich in der Ausführungsreihenfolge der beiden Prozeduren. Deshalb soll im Weiteren auch nur das Verfahren Mixed1 beschrieben werden.

Die Prozedur ProzGerGrad wird zu Beginn von Mixed1 ausgeführt. Aufgabe von ProzGerGrad ist es, am Ende der Ausführung den Graph so erweitert zu haben, dass alle Geraden einen geraden Gesamtgrad besitzen. Dazu werden von unserem neuen Ausgangsgraph(Abb. 12) die Knoten mit ungeraden Grad in einem neuen Hilfsgraph zusammengefasst(Siehe Abb. 13).

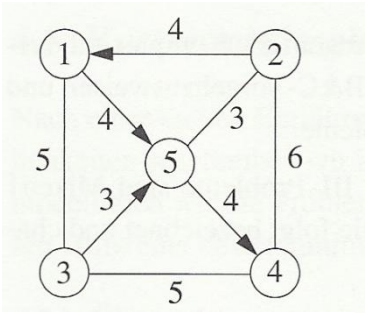

Abb. 13

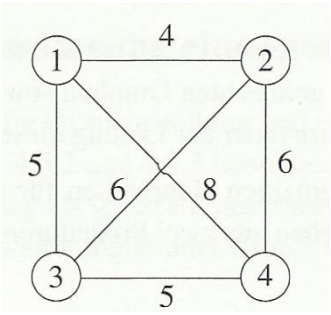

Abb. 12

Danach wird der Hilfsgraph mittels eines MK-Matching-Problem erweitert(Siehe 2.1.2), so dass wir einen gemischten Graphen erhalten bei dem alle Knoten einen geraden Grad besitzen.

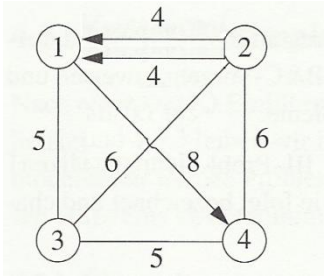

Abb. 14

Der Hilfsgraph ist damit ein Eulergraph. Wenn nun die negativen und positiven Grade der Knoten bereits übereinstimmen haben wir bereits eine kostenminimale Erweiterung gefunden und können an dieser Stelle das Verfahren beenden.

Um allen Knoten den gleichen Eingangs- wie Ausgangsgrad zu verschaffen wird Schritt 2 des Verfahrens angewendert. Dazu wird die Prozedur ProzEin=Aus ausgeführt.
Dem gemischten Graph aus Abb. 14 wird jeder ungerichteten Kante einen beliebige Richtung zugewiesen. Die gesamten Pfeile werden nun in der Mengen E1

zusammengefasst. Weiterhin wird die Menge E2 gebildet die, die gleichen Pfeile wie E1 enthält, allerdings wird der Richtungssinn umgedreht, sodass wir eine inverse Pfeilmenge bekommen.

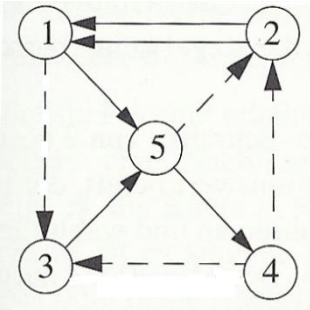

Abb. 15

Diesen gerichteten Graph(Abb. 15) formuliert man nun in ein kapazitiertes Umladeproblem und löst es. Das Ergebnis aus diesem Problem ist ein gerichteter Euler-Graph. Dabei gibt die Lösung Auskunft wie oft die bereits vorhandenen Kanten vervielfacht werden müssen und welche der Pfeile die zunächst eine willkürlichen Richtungssinn bekommen haben, diese Richtung beibehalten oder ihre entgegengesetzte Richtung aus E2 bekommen. Weiterhin wird entschieden welche der zusätzlichen Pfeile aus E1 bzw. E2 verdoppelt werden müssen.

2.1.3.2 Bemerkungen zu Mixed1 / Mixed2

Mixed1 liefert nur dann eine kostenminimale Erweiterung, wenn nach Schritt 1, Eingangs- und Ausgangsgrad der Knoten gleich sind. Sollte dies nicht der Fall sein, werden zwar zulässige Lösungen ermittelt allerdings keine optimalen.

Es ist trotzdem möglich eine Worst-Case-Schranke für die Güte der Verfahren anzulegen. Frederickson zeigte 1979 das die Länge der Briefträgertour die mit Mixed1 erstellt wird, im schlechtesten Fall nur doppelt so lang sein kann wie die kürzeste mögliche Briefträgertour. Die Zielfunktion ist also maximal 100% über dem optimalen Wert.
Eine noch bessere Lösung lässt sich erzielen wenn beide Verfahren angewendet werden und die Lösung mit dem besseren Ergebnis genutzt wird. So lässt sich die maximal Grenze auf 5/3 herabsetzen.

Seit 1999 wurde von Raghavachari und Veerasamy eine verbesserte Variante vorgestellt, bei dem zuerst ein Umladeproblem auf den Ausgangsgraphen definiert wird. Hierbei wird Angebot und Nachfrage aus den Graddifferenzen der Pfeile gebildet. Nachdem lösen des Umladeproblems ergibt das Mixed1/2-Verfahren nur noch eine maximale Oberschranke von 3/2.

2.1.3.3 GRASP-Verfahren

Eine weitere Möglichkeit neben den bereits genannten Verfahren ist eine Vorgehensweise die von Corberán et al. (2002) stammt. Dabei geht die „Greedy Randomized Adaptive Search Procedure“ in ihrem Verfahren, wie alle andere Algorithmen aus der Klasse der Greedy-Algorithmen so vor, dass schrittweise der Folgezustand ausgewählt wird. Hierbei wird vom aktuellen Punkt ausgewählt welcher der beste Nachfolger ist.

Hierbei wird wiederum ein Knoten als Angebots- bzw. Nachfrageknoten anhand der Graddifferenz identifiziert. In jedem Iterationsschritt wird nun eine Kante gewählt und ihr ein beliebiger Richtungssinn zugeordnet. Die Auswahl der Kante die gewählt wird, wird durch einen Parameter *s* der durch einen außenstehenden Planer definiert wird, priorisiert. Dabei handelt es sich bei dem Parameter *s* um die Anzahl der Angebots bzw. Nachfragekanten an einem Knoten.

Als Beispiel wählen wir einen Parameter s = 1 und nehmen den Graphen aus Abb. 16 als Beispiel.
Um nach dem Parameter s die Kante zu wählen die 1 Nachfrageknoten und 1 Angebotsknoten besitzt nehmen wir die Kante [2,4] und weisen ihr eine Richtung zu(Abb. 17). Es wird nun allen weiteren Kanten ein beliebiger Richtungssinn zu geordnet.

Auf den neuen erweiterten Graphen wird eine kostenminimale Erweiterung angewendet, wie sie bereits im Kapitel 3.1.1 beschrieben ist, und erhalten daraus einen Eulergraphen wie er in Abb. 18 zu erkennen ist.

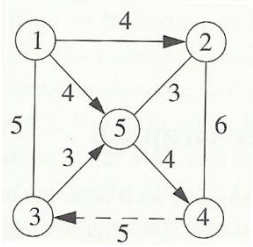

Abb. 18

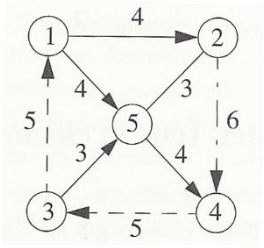

Abb. 17

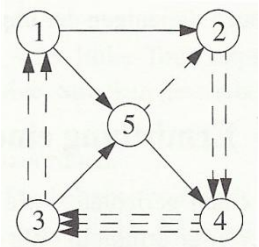

Abb. 16

2.1.4 Bestimmung von Eulerkreisen

Im Folgenden wird die Ermittlung von Eulerkreisen in gerichteten sowie ungerichteten Graphen beschrieben. Da sich die Methodik für beide Verfahren nicht unterscheidet werden sie zusammengefasst. Anschließend erfolgt eine Beschreibung zum Verfahren in gemischten Graphen.

Zur Verdeutlichung wie in einem (un)gerichteten Graphen ein Eulerkreis gefunden werden kann, wird der Graph in Abb. 19 als Grundlage dienen.

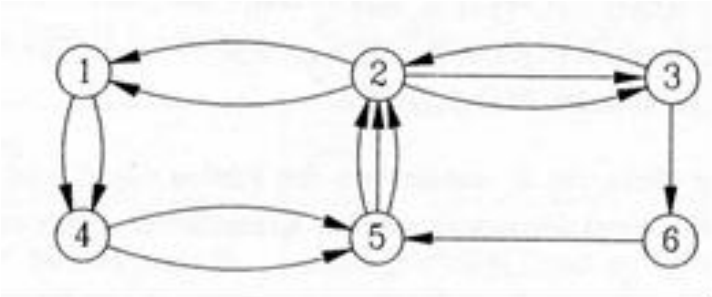

Abb. 19

Als Start wird eine beliebige geschlossene Kette gewählt. In der obigen Abbildung wäre es bspw. W=(1,4,5,2,1).
Im Folgenden wird iterativ vorgegangen:

- Man wähle einen Knoten aus W, der Kanten besitzt die noch nicht zu W gehören. Von diesem Knoten wählt man nun wieder eine geschlossene Kette die ausschließlich Kanten enthält die noch nicht zu W gehören.
  - Im Beispiel wählt man wieder den Knoten 1
    W‘=(1,4,5,2,3,6,5,2,1)
- W‘ wird nun sinnvoll in W eingefügt
  - Im Beispiel: W=(1,4,5,2,1,4,5,2,3,6,5,2,1)
  - sinnvoll bedeutet in diesem Kontext W‘ dort einzufügen wo sich bereits der Startknoten für W‘ befindet. Die neu gefundene Kette wird also nicht einfach an das Ende von W angehängt.

Ein Eulerkreis wurde dann gefunden, wenn alle Kanten und Knoten in geschlossenen Ketten in W zusammengefügt werden konnten. In unserem Beispiel würden wir also noch eine weitere Iteration für W‘=(3,2,3) benötigen um sie anschließend in W einzufügen. Am Ende erhält man einen Eulergraph der Form:
w=(1,4,5,2,1,4,5,2,3,2,3,6,5,2,1)

Die Bestimmung von Eulerkreisen in gemischten Graphen geschieht analog. Voraussetzung dazu ist allerdings, dass die einzelnen Teilketten jeweils nur aus Kanten oder Pfeilen bestehen sowie die negativen wie positiven Grade aller Knoten in den Ketten jeweils gleich sind.

Sind diese Voraussetzungen nicht geben, weißt man jeder Kante zunächst einen beliebigen Richtungssinn zu. Nach dem Lösen eines Umladeproblems wurde ein gerichteter Graph geschaffen in den wiederrum das zuvor genannte Verfahren angewendet werden kann.

2.2 Weitere Briefträgerprobleme

Neben dem klassischen „chinese postman problem“ existieren noch weitere Briefträgerprobleme, die sich an ähnliche oder abgewandelte Problemstellungen orientieren.

Häufig als erstes wird dabei das „Rural postman problem“ genannt. Vom englischen „rural“ für ländlich stammt diese Variante des Briefträgerproblems. Dabei müssen bei diesen Problemen nicht alle Kanten bedient werden, sondern lediglich ein Teil davon. Man stelle sich bspw. eine ländliche Gegend vor in der es Feldwege gibt die nicht beliefert werden müssen allerdings als Verbindungsstrecken für den kürzesten Weg genutzt werden können.

Weiterhin existiert das „windy postman problem“ welches lediglich in ungerichteten Graphen auftritt. Dabei besitzt jede Kante pro Richtung eine eigene Wertigkeit. In die Realität transportiert wäre das eine bergige Strecke die mit dem Fahrrad zu bewältigen ist. Bergauf müsste man mit mehr Kosten rechnen als bergab.

Die Lösung dieses Teilproblems ist dabei NP-schwer.

Das General-Routing-Problem ist eine Kombination aus dem Traveling-Salesman-Problem und dem Briefträgerproblem. Gesucht ist dabei ein kürzeste Rundreise die bestimmte Knoten und Kanten enthält. Bspw. möchte man eine Reise durch Paris planen und dabei sowohl den Eifelturm sehen(Knoten) als auch diverse Einkaufsstrecken(Kanten) besuchen.

Beim Maximum-Benefit-Problem wird eine Verallgemeinerung des Briefträgerproblems betrachtet bei dem der Besuch einer Kante Kosten hervorruft, aber am Ende des Knotens ein Ertrag steht. Gesucht wird bei diesem Verfahren ein gewinnmaximaler geschlossener Weg.

Aus dem Jahre 1970 stammt eine Abhandlung von Liebling bei der ein k-Briefträgerproblem anhand des städtischen Straßendienstes in Zürich behandelt wird. Dabei wird der Suchbereich in k-Teilnehmer Subbereiche aufgeteilt. Interessant an dieser Abhandlung ist, dass zum Zeitpunkt der Erstellung noch keine Lösungsmöglichkeiten für MK-Matching-Probleme existierten und hier also eine alternative Problemlösungsstrategie behandelt wird.

2.3 Beispiele aus der Praxis

2.3.1 Winterdienst im Staat Indiana

Aufgabe des Winterdienstes ist es die Straßen von anfallenden Schneemassen zu befreien. Dazu muss jede Straße min. 1x durchfahren werden, wobei doppelspurige Straßen mehrfach zu befahren sind. Weiterhin müssen unproduktive Strecken in Kauf genommen werden um anderen Teilgebiete zu erreichen.
Als weitere Nebenbedingungen sollen die unterschiedlichen Arten von Einsatzfahrzeugen genannt werden(Schneefräsen, Schneepflüge, Schneetransporter, etc.) sowie die unterschiedlichen Witterungsbedingungen. Bei Schneematsch oder starkem Schneefall sind andere Fahrzeuge sowie Streuungsmittel gefordert als bei überfrierender Nässe.

Weiterhin existieren Prioritätsstrecken wie Autobahnen oder Hauptstraße und zeitliche Restriktionen um ein erhöhtes Verkehrsaufkommen zu handhaben.

Aus der Problemstellung ergibt sich sehr leicht dass es hierbei um ein klassisches Briefträgerproblem handelt.

In Indiana wurde darauf ein System Namens CASPAR(Computer Aided System for Planning Efficient Routs) entwickelt, das mit Hilfe der zuvor genannten Methoden die Routen optimierte. Im Jahre 2002 wurden dadurch die Anzahl der Routen um 7,9% gesenkt. Weiterhin wurden die unproduktiven Strecken um 4,3% verringert und trotzdem konnten noch 79,3% mehr Strecken in den Streckenplan aufgenommen werden. In der Summe ergab sich für das Jahr 2002 dadurch eine Kostenersparnis von 10 Millionen USD.

2.3.2 Deutsche Post – „Paket 2012“

Der Aufbau der Streckenpläne sowie der Zustellbezirke werden im Rahmen einer zentral gesteuerten Optimierung regelmäßige durch die Regionalzentralen optimiert. Dabei werden in den bestehenden Streckenpläne nur vereinzelte Optimierungen durchgeführt und diese Streckenänderungen durch die betroffenen Postboten vor Ort bewertet.

Diese Bewertung der Streckenoptimierung wird zur internen Verfeinerung der Optimierungsprozesse genutzt. Es werden also verfeinerte Kantenbewertungen aufgestellt. Dabei steht in der Bewertung nicht nur die neu gewonnen Strecke im Vordergrund, ebenfalls mit einbezogen werden saisonale Schwankungen wie Nutzung von Strecken zur „Rush Hour“ oder Postaufkommen in Feriengebieten.

Durch Nutzung der beschriebenen Verfahren und Verfeinerung der Bewertungen, konnte in Teilgebieten die Bearbeitungsdauer der Touren um 15% gesenkt werden. Wobei dieser Prozesse nicht an einer Stelle als „beendet“ gewertet wird, sondern stetig weiter geführt wird, da durch bauliche Maßnahmen oder demographische als auch urbane Änderungen sich die Lage in den folge Jahren durch aus ändern wird.

3 Quellen

- Domschke: *Logistik: Transport*, Oldenbourg 2007 (5. Auflage)
- Hässig, K. (1979): Graphentheoretische Methoden des Operations Research, Teubner Studienbücher: Mathematik, Stuttgart
- Liebling, T.M. (1970): Graphentheorie in Planungs- und Tourenproblemen am Beispiel des städtischen Straßendienstes, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Springer, Berlin
- Tabatabai(2011): Das Briefträgerproblem
- Andreas Groll & Robert Jockwitz (2005): Bachelorthesis: Visualisierung grundlegender Graphenalgorithmen
- Iwanowski(2012): Diskrete Mathematik für Informatiker und andere Anwender