

Aufgabe 1)¹

Zeigen Sie, dass das folgende Programm DIV und MOD ausrechnet, indem Sie eine geeignete Invariantenbedingung für die Schleife formulieren und mit vollständiger Induktion beweisen und daraus die am Ende angegebene Nachbedingung folgern:

$$(x \geq 0) \wedge (y > 0) \wedge x, y \in \mathbb{Z} \quad \varphi$$

```
div := 0;
mod := x;
while mod ≥ y do
  begin
    mod := mod - y;
    div := div + 1;
  end
```

$$(x = \text{div} * y + \text{mod}) \wedge (0 \leq \text{mod} < y) \quad \psi$$

Tipp: Die Invariantenbedingung ist ein Teil der Nachbedingung. Vergleichen Sie diese Aufgabe auch mit Aufgabe 2 des 4. Übungsblatts.

Aufgabe 2) (Klausuraufgabe SS 2010)

Gegeben sei der folgende Programmausschnitt:

```
1 {n > 0 vom Typ integer}
2 k := 0; s := 1;
3 while (k < n) do
4 begin
5   k := s - 1;
6   s := s + 1;
7 end
```

- Formulieren Sie Bedingungen für k und s , die nach dem i -ten Schleifendurchlauf erfüllt sind.
- Beweisen Sie die Bedingungen aus a) mit vollständiger Induktion über i .
- Geben Sie Nachbedingungen für k und s an.
- Begründen Sie die Aussage von c): Hierfür dürfen Sie alles bisher Gezeigte verwenden.

¹ Diese Aufgabe ist identisch mit Aufgabe 5 des vorigen Übungsblatts

Aufgabe 3)

Was berechnet die folgende Prozedur? Was ist die schwächste Vorbedingung dafür?
(Beweis!)

Hinweis: Beweis durch vollständige Induktion über einen der Parameter.

```
procedure rekursiv(m,n: integer): integer
begin
  if (n<=0)
    return 0
  else
    return m + rekursiv(m, n-1);
end;
```

Aufgabe 4)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
function f(x, y, z : N) : N;
begin
  if (y=0) then
    return x*z
  else
    return f(x+z, y-1, z);
end;
```

- a) Was ist $f(3,4,2)$? (Zwischenschritte angeben!)
- b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über einen der Parameter, dass die Funktion $xz+yz^2$ berechnet.

Aufgabe 5)

- a) Geben Sie für die folgenden Funktionen den Rekursionstypen an.
 b) Begründen Sie jeweils Ihre Antwort (bei primitiv, end- und linear rekursiv durch Angabe der entspr. Funktionsteile oder (falls Ihnen das nicht gelingt) in Worten, bei allgemein rekursiv durch eine Argumentation, warum die Funktion noch nicht einmal linear rekursiv ist).
 c) Geben Sie für die endrekursiven Funktionen äquivalente nichtrekursive Prozeduren an!

i) `function ggT(x, y: N): N;`
`begin`
`if (x MOD y = 0) then`
`return y`
`else`
`return ggT(y, x MOD y);`
`end;`

ii) Es sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

| | |
|----------------------------------|-------------|
| $f(x) = 0$ | für $x = 0$ |
| $f(x) = x^{f(x \text{ DIV } 3)}$ | sonst. |

Zusatzfrage: Was ist $f(31)$?

iii) `f (x : N) : N`
`begin`
`if (x > 100) then`
`return x-10`
`else`
`return f(f(x+11));`
`end`

Zusatzfrage: Berechnen Sie $f(80)$, $f(85)$ und $f(90)$!
 Was würden Sie daraus für $f(x)$ im allgemeinen vermuten?

iv) Es sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

| | |
|------------------|--------------------|
| $f(x) = 1$ | für $x = 1$ |
| $f(x) = f(x/2)$ | für gerade x |
| $f(x) = f(3x+1)$ | für ungerade x . |

Zusatzfrage: Berechnen Sie $f(10)$, $f(15)$ und $f(20)$!
 Was würden Sie daraus für $f(x)$ im Allgemeinen vermuten?
 Statt eines Beweises sollten Sie lieber nach Ulam-Collatz googeln!