Diskrete Mathematik Anwendungsvorlesung

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 5: Verifikation von Schleifen

Verifikation und Konstruktion von Schleifen

Definition einer Schleife:

```
while Schleifenbedingung do
     Rumpfanweisung
```

`Schleifenbedingung` muss eine logische Funktion sein, die nur von Variablen abhängen darf, die mit Werten belegt sind.

Funktionsweise:

1) Zunächst wird **`Schleifenbedingung`** ausgewertet.

2) Wenn **`Schleifenbedingung`** falsch ist, wird die Schleife sofort beendet. Wenn **`Schleifenbedingung`** wahr ist, wird **`Rumpfanweisung`** ausgeführt. Dann wird bei Schritt 1) fortgefahren.

Verifikation von Schleifen

Verifikationstechnik:

	Vorbedingung	φ
W	while Schleifenbedingung do	β
	Eintrittsbedingung	φ_i
	Rumpfanweisung	S
	Austrittsbedingung	ψ_i
	Nachbedingung	ψ

Definition:

Es sei φ_i die Eintrittsbedingung vor der i-ten Ausführung der Rumpfanweisung und ψ_i die Austrittsbedingung nach der i-ten Ausführung der Rumpfanweisung Die Schleife werde nach k Ausführungen beendet.

Dann gilt:

1) $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi \wedge \beta$ (φ_1, Rumpfanweisung, ψ_1)

2) $\varphi_2 \Leftrightarrow \psi_1 \wedge \beta$ (φ_2, Rumpfanweisung, ψ_2)

.

i) $\varphi_i \Leftrightarrow \psi_{i-1} \wedge \beta$. (φ_i, Rumpfanweisung, ψ_i)

.

k) $\varphi_k \Leftrightarrow \psi_{k-1} \wedge \beta$ (φ_k, Rumpfanweisung, ψ_k)

k+1) $\psi \Leftrightarrow \psi_k \wedge \neg\beta$ (φ_k, Rumpfanweisung, ψ_k)

Problem:

Es ist unklar, wie groß k ist, d.h. wie viele Zwischen-bedingungen φ_i und ψ_i es gibt.

Verifikation von Schleifen

Verifikationstechnik:

```
        Vorbedingung                          φ
      ⎧ while Schleifenbedingung do           β
      ⎪         Eintrittsbedingung            φi
  W   ⎨       Rumpfanweisung                  S
      ⎪         Austrittsbedingung            ψi
      ⎩ Nachbedingung                         ψ
```

Gegeben ψ, berechne φ: Wie findet man die schwächste Vorbedingung P für φ ?

Beobachtung:

0) Sei P_0 die schwächste Vorbedingung, falls die Schleife gar nicht durchlaufen wird.

1) Sei P_1 die schwächste Vorbedingung, falls die Schleife genau einmal durchlaufen wird.

i) Sei P_i die schwächste Vorbedingung, falls die Schleife genau i-mal durchlaufen wird.

Lösung: Dann gilt: $P = P_0 \vee P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots$ *potentiell unendlich viele!*

Problem: Im allgemeinen Fall könnten sich die P_i's alle unterscheiden !

Damit kann keine allgemeine Lösungstechnik angegeben werden !

Verifikation von Schleifen

Verifikationstechnik:

	`Vorbedingung`	φ
W	**`while Schleifenbedingung do`**	β
W	`Eintrittsbedingung`	φ_i
W	**`Rumpfanweisung`**	S
W	`Austrittsbedingung`	ψ_i
	`Nachbedingung`	ψ

Aufgaben, die bei Zuweisungen und Verzweigungen gelöst wurden:

Berechnung der schwächsten Vorbedingung: Gegeben ψ, berechne φ

Berechnung der stärksten Nachbedingung: Gegeben φ, berechne ψ

Das ist hier zu schwierig !

Einfachere Aufgabe:

Gegeben φ **und** ψ:

Beweise, dass gilt: **(φ, W, ψ) !**

Verifikation von Schleifen

Wesentliche Schritte bei der Verifikation von Schleifen:

Invariantenbestimmung (Hauptarbeit):

1) **Beweise eine Aussage über den Wert der Schleifenvariablen nach Durchlauf der Schleife in Abhängigkeit von der Durchlaufzahl i.**

Variantenbestimmung (meist leichte, aber wichtige Zusatzarbeit):

2) **Beweise, dass die Schleife irgendwann zum Ende kommt.**

Folgerung (meist unmittelbar):

3) **Die Nachbedingung ψ ergibt sich aus dem Belegungswert der Variablen (1), wenn die Schleife zum Ende gekommen ist (2)**

Verifikation von Schleifen

Wesentliche Schritte bei der Verifikation von Schleifen:

Invariantenbestimmung (Hauptarbeit):

1) **Beweise eine Aussage über den Wert der Schleifenvariablen nach Durchlauf der Schleife in Abhängigkeit von der Durchlaufzahl i.**

   Beweistechnik: Vollständige Induktion über i:

   Seien x_1, ..., x_j die Variablen, die in der Rumpfanweisung verändert werden:

   a) Unterscheide die Belegungswerte dieser Variablen nach i bzw. i+1 Schleifendurchläufen:
      x_{1i}, ..., x_{ji} ist der Wert nach i Schleifendurchläufen.
      $x_{1,i+1}$, ..., $x_{j,i+1}$ ist der Wert nach i+1 Schleifendurchläufen.

   b) Setze die verschiedenen Belegungszustände in Beziehung zueinander (gemäß Programm), verwende die Induktionsannahme für i und folgere die Induktionsbehauptung für i+1

   *Die Bedingungen für die Belegungswerte heißen **Invariante** der Schleife.*

Verifikation von Schleifen

Wesentliche Schritte bei der Verifikation von Schleifen:

Variantenbestimmung (meist leichte, aber wichtige Zusatzarbeit):

2) Beweise, dass die Schleife irgendwann zum Ende kommt.

Hierfür muss β vom Belegungswert mindestens einer der Variablen $x_1, ..., x_j$ abhängen!
*Eine solche Variable heißt **Variante** der Schleife.*

Folgerung (meist unmittelbar):

3) Die Nachbedingung ψ ergibt sich aus dem Belegungswert der Variablen (1), wenn die Schleife zum Ende gekommen ist (2)

Das ergibt sich in der Regel unmittelbar, weil die Invariantenbedingungen in 1) entsprechend formuliert werden.

Regelfall: In ψ wird eine Aussage über den Belegungszustand von in der Schleife veränderten Variablen gemacht.

Sonderfall: Falls in ψ noch andere Zusammenhänge gefordert werden, sollte das in 1) und 2) vorbereitet werden, indem weitere Hilfsgrößen definiert werden.