Diskrete Mathematik Anwendungsvorlesung

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 2: Prädikatenlogik

Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik:

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen
- keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“

In der Prädikatenlogik:

- Variable
- Prädikate
- Funktionen
- Quantoren

Prädikatenlogik

- **Variable**

  In eine Variable dürfen beliebige Elemente eingesetzt werden.

  Könnten nicht die Literale in der Aussagenlogik als Variable aufgefasst werden ?

  Was ist bei Literalen in der Aussagenlogik anders ?

- **Prädikate**

  Ein Prädikat ist eine Aussage, die von anderen Werten abhängt.

  Die Anzahl der Werte, von denen ein Prädikat abhängt, ist für jedes Prädikat eine beliebige, aber feste Zahl.

  Ein Prädikat, das von k Werten abhängt, heißt k-stellig.
  Kurzform: $P(x_1, x_2, ..., x_k)$

  Ein Prädikat ist eine Funktion mit beliebigem aber vorgegebenen Definitionsbereich und einer zweiwertiger Zielmenge {w,f}.

Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Prädikaten:**

1. Zwei Personen sind miteinander verheiratet

2. Eine Person liebt eine andere

3. Eine Person besucht die Vorlesung Diskrete Mathematik

4. Eine Person besucht eine beliebige Vorlesung

5. Ein Ort liegt zwischen zwei anderen

Prädikatenlogik

- **Funktionen**

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die einer Menge von Werten einen neuen Wert eindeutig zuordnet.
Kurzform: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$

Eine Funktion, die von k Werten abhängt, heißt k-stellig.

Unterschied zu Prädikaten:

- **Die Zielmenge ist beliebig.**
- **Funktionen dienen der Transformation von Argumenten.**
  Die Funktionswerte werden als Argumente in Prädikate eingesetzt.

Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Funktionen und ihrer Verwendung in Prädikaten:**

  1. Die Farbe des Autos ist grün.

  2. Die Klausurnote eines Stipendiaten ist besser als 2.

  3. Das Alter von Linda ist mindestens 18.

Prädikatenlogik

- **Quantoren**

  - **für Aussageformen, die nur von x abhängen:**

    Der Existenzquantor $\exists x$ (...) beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für x gibt, der die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

    Der Allquantor $\forall x$ (...) beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für x die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

    Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

    Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*, für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

  - **für Aussageformen, die von weiteren Variablen abhängen:**

    Existenzquantor $\exists x$ (...) und Allquantor $\forall x$ (...) beschreiben Aussage*formen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über x die Aussage bereits gemacht ist.

Prädikatenlogische Formeln

- **Eine prädikatenlogische Formel 1. Stufe ist eine Verknüpfung von endlich vielen Variablen, Funktionen und Prädikaten mit aussagenlogischen Operatoren oder Quantoren, die sich nur auf Variable beziehen.**

Bsp.: $\forall x \, (R(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \wedge \exists y \, (\neg P(y, x) \vee R(y, \mathbf{z})))$

Grüne Vorkommen von y und z sind **frei**.
Rote Vorkommen von x, y und z sind gebunden.

Prädikatenlogische Formeln

- **Eine Belegung einer Formel ist eine Zuweisung von *Werten aus festgelegten Definitionsbereichen an die freien Variablen* derart, dass dieselben Variablen immer denselben Wert erhalten.**

- **Eine Formel heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel wahr ist.**

☹

  - Das Erfüllbarkeitsproblem ist in der Prädikatenlogik nicht entscheidbar, d.h. kein Algorithmus kann jemals in der Lage sein, von jeder Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

Das prädikatenlogische Erfüllbarkeitsproblem ist unlösbar !

Das Wort Belegung kann noch allgemeiner aufgefasst werden:

- **Eine Belegung einer Formel mit abstrakten Prädikats-, Funktions- und Variablensymbolen ist eine Zuweisung von konkreten Prädikaten, Funktionen und Werten an die Variablen, die mit den Definitionen übereinstimmt.**

„Interpretation", „Modell"

Prädikatenlogik

Beschreibung der semantischen Eigenschaft einer Formel $F(x_1, x_2, ..., x_k)$ mit prädikatenlogischen Mitteln:

- **F ist erfüllbar:**

  $$\exists\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widersprüchlich:**

  $$\forall\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \bot)$$

- **F ist gültig (Tautologie):**

  $$\forall\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widerlegbar:**

  $$\exists\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \bot)$$

Was fällt auf ?

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

$\neg\forall x\,(F(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x))$

$\neg\exists x\,(F(x)) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg F(x))$

Verallgemeinerung von deMorgan

$\forall x\,\forall y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y\,\forall x\,(F(x,y))$

$\exists x\,\exists y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y\,\exists x\,(F(x,y))$

Vertauschung gleicher Quantoren

Was gilt bei der Vertauschung verschiedener Quantoren ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)

$\exists x\,\forall y\,(F(x,y))$ $\qquad$ $\forall y\,\exists x\,(F(x,y))$

$\exists y\,\forall x\,(F(x,y))$ $\qquad$ $\forall x\,\exists y\,(F(x,y))$

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in $\wedge$ oder $\vee$? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)

$\forall x\, (F(x)) \vee \forall x\, (G(x))$	$\forall x\, (F(x) \vee G(x))$
$\forall x\, (F(x)) \wedge \forall x\, (G(x))$	$\forall x\, (F(x) \wedge G(x))$
$\exists x\, (F(x)) \vee \exists x\, (G(x))$	$\exists x\, (F(x) \vee G(x))$
$\exists x\, (F(x)) \wedge \exists x\, (G(x))$	$\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$

Prädikatenlogik

Übersetzung Umgangssprache in prädikatenlogische Formeln

Umgangssprache	Formel
Höchstens Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F.	$\forall x\ F(x) \rightarrow E(x)$
Höchstens x hat die Eigenschaft F.	$\forall y\ F(y) \rightarrow y=x$
Genau die Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F.	$\forall x\ F(x) \Leftrightarrow E(x)$
Nur x hat die Eigenschaft F.	$\forall y\ F(y) \Leftrightarrow y=x$
Alle Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F.	$\forall x\ E(x) \rightarrow F(x)$
Alle Objekte haben die Eigenschaft F.	$\forall x\ F(x)$
Kein Objekt x mit Eigenschaft E hat Eigenschaft F.	$\forall x\ E(x) \rightarrow \neg F(x)$
Kein Objekt hat die Eigenschaft F.	$\forall x \neg F(x)$
Einige Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F.	$\exists\ x\ E(x) \land F(x)$
Objekte x mit Eigenschaft E haben Eigenschaft F.	$\forall x\ E(x) \rightarrow F(x)$
Objekte x mit Eigenschaft E sind die Objekte mit Eigenschaft F.	$\forall x\ E(x) \Leftrightarrow F(x)$

Prädikatenlogik

Übersetzung Umgangssprache in prädikatenlogische Formeln

Umgangssprache	**Formel**
Für alle Objekte x, für die es ein n gibt mit P(x,n), gibt es ein m mit Q(x,m)	$\forall x\ \forall n\ \exists\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$

Warnung!

$\forall x\ \forall n\ \forall\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$

ist eine stärkere Aussage:
Jetzt müsste Q(x,m) für alle m gelten, wenn es für x ein n_0 gibt mit $P(x,n_0)$.

$\forall x\ \exists\ n\ \exists\ m\ P(x,n) \rightarrow Q(x,m)$

ist eine schwächere Aussage:
Jetzt müsste Q(x,m) für kein m gelten, selbst wenn es für x ein n_0 gibt mit $P(x,n_0)$: Denn man könnte in P(x,n) einfach ein $n_1 \neq n_0$ einsetzen mit $P(x,n) = \perp$, und dann muss Q(x,m) niemals wahr sein.

Beispiel:

Alle Leute, die verheiratet sind, haben einen Trauzeugen.

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Präfix-Notation	Infix-Notation	Postfix-Notation
(Standard in Prädikatenlogik)	(Standard in Arithmetik)	(Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern)
`lessThan (x,y)`	`x < y`	`x, y, <`
`equal (x,y)`	`x = y`	`x, y, =`

Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:

$x \leq y \qquad x \geq y \qquad x \neq y \qquad x > y$

Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?

Bsp.: Drücke folgenden Sachverhalt mit maximal zweistelligen Prädikaten und maximal zweistelligen Funktionen aus:

$(2 < x < 4) \wedge (0 < y < 6) \wedge (x + y > 7) \wedge (x \cdot y < 10)$

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Bilde das Gegenteil von:

1) $(\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)$

2) $\forall \mathbf{y}<0 \ ((\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$

Prädikatenlogik

Was bedeuten eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren ?

$\forall\ y \in D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\forall\ y\ (y \in D \rightarrow P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y\ (y \notin D \lor P(y))$

$\exists\ y \in D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\exists\ y\ (y \in D \land P(y))$

Daher gilt für die Negation:

$\neg(\forall\ y \in D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\forall\ y\ (y \notin D \lor P(y))) \Leftrightarrow \exists\ y\ (y \in D \land \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \exists\ y \in D\ (\neg P(y))$

$\neg(\exists\ y \in D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\exists\ y\ (y \in D \land P(y))) \Leftrightarrow \forall\ y\ (y \notin D \lor \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y \in D\ (\neg P(y))$

➔ **Eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren werden bei Negationen nicht ebenfalls negiert !**

Prädikatenlogik

Anwendung auf Aufgabe von vorhin:

Bilde das Gegenteil von: $\forall y{<}0\ ((x>0)\ \vee\ ((y+x)\leq 0))$

Lösung:

$\forall y{<}0\ ((x>0)\ \vee\ ((y+x)\leq 0))$

ist Kurzschreibweise von: $\forall y\ (\neg(y<0)\ \vee\ ((x>0)\vee((y+x)\leq 0)))$

„Gegenteil" soll heißen: Negation der oben angegebenen Formel

$\neg\forall y\ (\neg(y<0)\ \vee\ ((x>0)\vee((y+x)\leq 0)))$

$\Leftrightarrow \exists y\ ((y<0)\ \wedge\ (x\leq 0)\wedge((y+x)>0)))$

$\Leftrightarrow\ \exists y{<}0\ ((x\leq 0)\ \wedge\ ((y+x)>0)))$

$\Leftrightarrow \perp$ **für alle x**

Also ist die Negation ein Widerspruch

Was folgt dann für die ursprüngliche Formel ?

Prädikatenlogik

Achtung: Unterscheide, wo die Negation steht:

Aussagen für negierte Formeln: $(\mathbf{F(x)} \leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{F(x)} \leftrightarrow \bot)$

(gilt für *beliebige* x)

Damit gilt:

$\mathbf{F(x)}$ ist Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg\mathbf{F(x)}$ ist Widerspruch

$\mathbf{F(x)}$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar

Also ist die Formel $\mathbf{F(x)} \Leftrightarrow \forall \mathbf{y<0}\ ((\mathbf{x>0}) \vee ((\mathbf{y+x}) \leq 0))$ eine Tautologie,
da $\neg\mathbf{F(x)} \Leftrightarrow \neg(\forall \mathbf{y<0}\ ((\mathbf{x>0}) \vee ((\mathbf{y+x}) \leq 0)))$ ein Widerspruch ist.

Negierte Aussagen für dieselbe Formel $\mathbf{F(x)}$:

$\mathbf{F(x)}$ ist Tautologie $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widerlegbar

$\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** Tautologie

$\mathbf{F(x)}$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widersprüchlich

$\mathbf{F(x)}$ ist widersprüchlich $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** erfüllbar

Unterscheide: $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widerlegbar $\neq$ $\neg\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar