

# ***Diskrete Mathematik***

## ***Teil Logik***

Sebastian Iwanowski  
FH Wedel

**Kap. 1: Aussagenlogik**

# Aussagenlogik

## Wdh.: Operatoren zwischen Aussagen

Durch Operatoren werden  
aus alten Aussagen  
neue Aussagen geschaffen:

### Einstelliger Operator:

- Negation ( $\neg$ )

### Zweistellige Operatoren:

- Konjunktion ( $\wedge$ )
- Disjunktion ( $\vee$ )
- Implikation ( $\rightarrow$ )
- Äquivalenz ( $\leftrightarrow$ )

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

# Aussagenlogik

**Achtung: Warum einfach, wenn es auch kompliziert geht ?**

**Folgende Notationen sind in der Literatur ebenfalls gebräuchlich:**

für logische Schlussregeln:  $\frac{p, q}{r}$  ist dasselbe wie  $p \wedge q \Rightarrow r$

**In der Logik benutzt man unterschiedliche Symbole für Schlussfolgerungen und Äquivalenzen je nach Anwendungsgebiet:**

$\vdash, \vDash, \prec, \rightarrow$  entsprechen der logischen Implikation:  $\Rightarrow$

$\vDash, =, \equiv, \langle \rangle, \leftrightarrow$  entsprechen der logischen Äquivalenz:  $\Leftrightarrow$

# Aussagenlogische Formeln

- Da elementare Aussagen wegen der Unteilbarkeit sinnvollerweise mit Buchstaben abgekürzt werden, nennt man sie auch *Literale*
- Eine aussagenlogische **Formel** ist eine Verknüpfung von endlich vielen Literalen mit logischen Operatoren.
  - Die Literale einer Formel entsprechen Variablen, die mit w und f belegt werden können.
  - Formeln können auch Konstante enthalten:
    - Die Konstante  $\top$  ist immer wahr und das neutrale Element bezüglich der Konjunktion.
    - Die Konstante  $\perp$  ist immer falsch und das neutrale Element bezüglich der Disjunktion.
- Eine **Belegung einer Formel** ist eine Zuweisung von Wahrheitswerten an die Literale derart, dass dieselben Literale immer denselben Wahrheitswert erhalten.

Die Formel als ganze bekommt durch die Belegung ebenfalls einen Wahrheitswert.

# Aussagenlogische Formeln

- Eine Formel heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel den Wahrheitswert  $w$  hat.

Eine Formel, in der jeder Literal höchstens einmal vorkommt, ist immer erfüllbar!

Eine Formel, in der keine Negation vorkommt, ist immer erfüllbar!

⇒ Nur Formeln, die einen Literal mehrfach und mindestens eine Negation enthalten, könnten unerfüllbar sein.

- Eine Formel heißt **Tautologie** oder **gültig**, wenn sie bei **jeder** Belegung den Wahrheitswert  $w$  hat.
- Eine Formel heißt **widersprüchlich**, wenn sie bei **keiner** Belegung den Wahrheitswert  $w$  hat.

# Aussagenlogische Formeln

## Erfüllbarkeitsproblem (Satisfiability, SAT):

Wie bekommt man heraus, ob eine gegebene Formel erfüllbar ist ?

# Normalformen

## Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

## Etwas langsamer zum Mitdenken:

Ein **Literal** ist eine Aussage oder die Negation einer Aussage.

**Beispiele:**  $p$     $\neg q$     $r$     $\neg r$

Eine **Klausel** ist eine Disjunktion aus Literalen.

**Beispiele:**  $p \vee \neg q \vee r$     $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$     $p \vee q$

Eine **Formel in KNF** ist eine Konjunktion von Klauseln.

**Beispiel:**  $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

# Normalformen

## Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

## Spezialfälle:

Eine **Klausel** darf auch nur aus einem Literal bestehen.

Beispiel:  $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (p \vee q)$  ist auch in KNF

Eine **Formel** darf auch nur aus einer Klausel bestehen.

Beispiel:  $p \vee \neg q \vee r$  ist auch in KNF

Eine **leere Klausel** entspricht dem neutralen Element der Disjunktion:  $\perp$

Beispiel:  $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \perp \wedge (p \vee q)$  ist auch in KNF

Eine **leere Formel** entspricht dem neutralen Element der Konjunktion:  $\top$

Beispiel:  $\top$  ist auch in KNF



# Normalformen

## Welche Formeln sind eigentlich **nicht** in KNF ?

- Formeln, die andere als die 3 Booleschen Operatoren enthalten

**Beispiel:**  $((p \vee \neg q \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (p \vee q)$

- Formeln, in denen andere Terme als atomare Aussagen negiert werden

**Beispiel:**  $\neg(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge \neg(p \vee q)$

- Formeln, in denen Konjunktionen und Disjunktionen wild durcheinander sind

**Beispiel:**  $(p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee p \wedge q$

**Beispiel:**  $p \wedge (\neg q \vee r \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p \wedge q$

- Formeln, in denen eine tiefere Klammerschachtelungstiefe vorliegt

**Beispiel:**  $p \wedge (\neg q \vee (r \wedge q)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \vee q$

**Satz:** **Jede** aussagenlogische Formel lässt sich durch endlich viele äquivalente Umformungen in KNF bringen.

# Normalformen

## Algorithmus zum Umwandeln einer Formel in die KNF:

1. Eliminiere alle Operatoren der Form  $\leftrightarrow$  und  $\rightarrow$  mit den Ersetzungsregeln durch  $\wedge$  und  $\vee$  !
2. Ziehe alle Negationszeichen vor Klammern in die Klammern hinein mit den deMorganschen Regeln !
3. Wende die Distributivgesetze so lange an, bis auf oberster Ebene nur noch Konjunktionen und darunter Disjunktionen sind !

**Das funktioniert immer !**

# Normalformen

## Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Übersichtlichere Auswertung beim Erfüllbarkeitstest:**

Eine Formel in KNF ist erfüllbar.

⇔ Eine Belegung enthält für jede Klausel wenigstens einen wahren Literal.

### **Mögliche Belegungsstrategie:**

- Gehe die Klauseln nacheinander durch:
- Belege genau einen noch nicht festgelegten Literal mit  $\tau$   
(dadurch werden gleiche Literale oder deren Negationen in anderen Klauseln festgelegt)
- Wenn es keine Möglichkeit mehr gibt, springe zurück zur vorigen Klausel und nimm eine andere Belegung

### **Vorsicht vor Illusionen:**

**Im schlechtesten Fall bringt das keinen Zeitgewinn  
verglichen mit purem Ausprobieren !**

# Normalformen

## Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Kompakte Darstellbarkeit im Computer:**

Stelle Klauseln als Mengen von Literalen dar:

$\{p, \neg q, r\}$  entspricht  $(p \vee \neg q \vee r)$  als Klausel

Stelle Formeln als Mengen von Klauseln dar:

$\{\{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, q\}\}$  entspricht  $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

Das funktioniert sogar für die Spezialfälle:

$\{\{p, \neg q, r\}\}$  entspricht  $(p \vee \neg q \vee r)$  als Formel

$\{\{p\}, \{\neg q\}, \{r\}\}$  entspricht  $(p \wedge \neg q \wedge r)$  als Formel

$\{\}$  entspricht  $\top$  als Formel

$\{\{\}\}$  entspricht  $\perp$  als Formel

## Warnung:

**Was dem Computer glasklar ist, kann für den Menschen höchst verwirrend sein:**

- Das Trennzeichen (,) in **inneren** Klammern (Klauseln) entspricht einer Disjunktion ( $\vee$ )
- Das Trennzeichen (,) in **äußeren** Klammern (Formeln) entspricht einer Konjunktion ( $\wedge$ )

# Andere Normalformen

## Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie als Disjunktion von Konjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

## Jetzt fällt das Mitdenken schon leichter:

Was ist ein DNF-Literal ?

Was ist eine “DNF-Klausel” ?

Was ist eine DNF-Formel ?

Beispiele ?

**Warum wollen wir Formeln in DNF bringen ?**

**wollen wir nicht: Eine Normalform reicht uns aus !**

# Zusammenfassung: Aussagenlogische Formeln

## Formeln haben logische Eigenschaften (Semantik):

- **Erfüllbarkeit**
  - **Widerspruch** äquivalent zu  $\perp$
  - **Tautologie** äquivalent zu  $\top$
  - *Widerlegbarkeit*
- } komplementär zueinander
- } komplementär zueinander

## Formeln haben Darstellungseigenschaften (Syntax):

- **Normalformen (KNF oder DNF)**
- **Mengendarstellung der KNF**

*Die eben genannten Darstellungseigenschaften sind für jede Formel durch Äquivalenz erzielbar.*

*Es gibt auch Darstellungseigenschaften, die nur für bestimmte Formeln möglich sind.*

**Bsp.:** KNF mit Klauseln aus genau drei Literalen