Computer Algebra

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

2. Ganzzahlarithmetik
2.2 Division, Rationale Arithmetik

Referenzen zum Nacharbeiten:

Köpf 3.3, 3.6, Kaplan 4.1.4, 4.1.5, 4.2
Vorlesungsübersicht Diskrete Mathematik Kap. 4 (Euklidischer Algorithmus)
Knuth 4.5.1 – 4.5.3 (Band 2) (Euklidischer Algorithmus)
Seminararbeit 3 (Thomas Stuht), Folien 22-25

Computer Algebra 2

Algorithmen zur Langzahldivision von a und b

- Teilen mit Rest (Schulmethode) (für Basis β=10)

Laufzeit: $O(n^2)$

```
DIV (I: [i_{n-1} i_{n-2} … i_0], J: [j_{m-1} j_{m-2} … j_0]): [q_{l-1}, q_{l-2}, … q_0]
J > I => return [0];
Q := [ ];                /* Initialisierung des Ergebnisses mit leerer Liste */
I* := [i_{n-1} i_{n-2} … i_{n-m}] ;  /* neuer Dividend: wird im Folgenden sukzessiv um eine Stelle erweitert */
f:= n-1; k := n-m        /* erster und letzter Index von I* innerhalb der Eingabe I */
while (k ≥ 0) do
  { if I* < J
       { append (Q, 0); }
    else
       { if (length(I*) > length(J))
            { qTest := (i_f •10 + i_{f-1}) DIV j_{m-1};
              if (qTest > 9) {qTest := 9;} /* Der Spezialfall */  }
         else
            { qTest := i_f DIV j_{m-1};};
       J* := qTest • J;
       while (J* > I*) do
           { qTest := qTest-1; J* := qTest • J; }
       append (Q, qTest);
        I* := I* - J*; f := Erster Index von I* ungleich Null bzw. k-1 falls I*=0; }      /* end if */
    k := k-1; if (k ≥ 0) {I* := I*•10 + i_k; } /* Erweitern von I* um nächste Stelle */ } /* end while */
return Q;
```

Satz (Pope-Stein):
Falls j_{m-1} mindestens $\beta/2$ ist,
liegt qTest höchstens 2 über dem tatsächlichen Wert.

Computer Algebra 2

Algorithmen zur Langzahldivision von a und b

Die Zahlengröße beider Operanden sei O(n)

- Teilen mit Rest

  Laufzeit: $O(n^{\log_2(3)})$

  DIV:
  Abschätzung des ganzzahligen Quotienten nach Pope-Stein
  (verbessert nur die Konstante)
  Entwicklung und Analyse des zugehörigen Divisionsalgorithmus

  Laufzeit: $O(n^2)$
  auch in $O(n^{\log_2(3)})$ möglich

  Details: Kaplan, S. 74-79 (kommentiert mit Korrekturen)

  MOD:
  x MOD y = x – x DIV y

  rechnet man als 2. Wert nach DIV aus.
  => keine zusätzliche Laufzeit

- Kürzen: Euklidischer Algorithmus

  Laufzeit: $O(n^2)$
  Beweis schwierig, siehe Kaplan, Knuth

  Details:
  Vorlesung Diskrete Mathematik

Computer Algebra 2

Rational Arithmetik

Rationale Arithmetik Durchführen der Grundrechenarten für Brüche

- Rechenregeln

  Durchführung wie in Schulmathematik

  Maximale Laufzeit: $O(n^{\log_2(3)})$

- Kürzen

  Anwendung des Euklidischen Algorithmus

  Laufzeit: $O(n^2)$

Fazit: Alle rationalen Operationen in $O(n^2)$ möglich