Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 5: Algebraische Strukturen

Referenzen zum Nacharbeiten:

Biggs 20, 22, 23
Kurzweil (deutschsprachige Vertiefung, insb. für Endliche Körper)
Hachenberger 10 (Vertiefung für Polynome)
Teschl 3.2, 4

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Definition der Struktur einer Gruppe:

Sei G eine nichtleere Menge und $\oplus$ eine Verknüpfung zwischen den Elementen von G.
Dann heißt die Struktur (G, $\oplus$) eine **abelsche Gruppe**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) $\forall$ a,b $\in$ G: a $\oplus$ b $\in$ G	***innere Verknüpfung***
2) $\forall$ a,b,c $\in$ G: (a $\oplus$ b) $\oplus$ c = a $\oplus$ (b $\oplus$ c)	***Assoziativgesetz***
3) $\exists$ $e \in$ G $\forall$ a $\in$ G: $e \oplus a = a \oplus e = a$	***Neutrales Element***
4) $\forall$ a $\in$ G $\exists$ $a^{-1} \in$ G: $a^{-1} \oplus a = a \oplus a^{-1} = e$	***Inverses Element***
5) $\forall$ a,b $\in$ G: a $\oplus$ b = b $\oplus$ a	***Kommutativgesetz***

nur Eigenschaft 1):	Gruppoid
nur Eigenschaft 1), 2):	Halbgruppe
nur Eigenschaft 1), 2), 3), 4):	Gruppe

Vorbilder: $(\mathbb{Z},+)$ für eine unendliche Gruppe $(\mathbb{Z}_n,+)$ für eine endliche Gruppe

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für oder gegen unendliche Gruppen bzw. Unterstrukturen:

1) $(\mathbb{N},+)$
2) $(\mathbb{Z},+)$
3) $(\mathbb{Z},\cdot)$
4) $(\mathbb{Q},+)$
5) $(\mathbb{Q},\cdot)$
6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\},\cdot)$
7) $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$
8) $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$
9) $(\mathbb{R} \setminus \{0\},+)$
10) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\},+)$
11) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\},\cdot)$
12) $(\{f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to\mathbb{R} \setminus \{0\}\},\cdot)$
13) $(\{f: \mathbb{R}^+ \to\mathbb{R}^+\},\cdot)$
14) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}\},\circ)$
15) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f bijektiv$\},\circ)$
16) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f differenzierbar$\},\circ)$
17) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f bijektiv und differenzierbar$\},\circ)$
18) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f linear$\},\circ)$
19) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f linear$\},+)$
20) $(\{f: \mathbb{R} \to\mathbb{R}$, f Polynomfunktion$\},+)$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für endliche Gruppen bzw. Halbgruppen:

1) $(\mathbb{Z}_n,+)$ *(zyklische Gruppe mit additiver Verknüpfung)*

2) $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$

3) $(\mathbb{Z}_n \setminus \{[0]_n\},\cdot)$

4) $(\mathbb{Z}_n{}^*,\cdot)$ *(multiplikative Gruppe der zu n teilerfremden Restklassen,* ***prime Restklassengruppe mod n****)*

$$(\mathbb{Z}_8^*,\odot):\quad \begin{array}{c|cccc} \odot & [1]_8 & [3]_8 & [5]_8 & [7]_8 \\ \hline [1]_8 & [1]_8 & [3]_8 & [5]_8 & [7]_8 \\ [3]_8 & [3]_8 & [1]_8 & [7]_8 & [5]_8 \\ [5]_8 & [5]_8 & [7]_8 & [1]_8 & [3]_8 \\ [7]_8 & [7]_8 & [5]_8 & [3]_8 & [1]_8 \end{array}$$

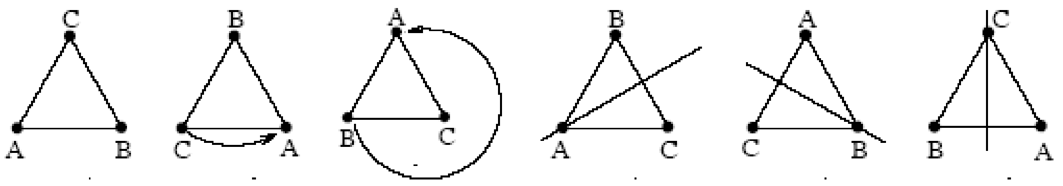
$$(\mathbb{Z}_{10}^*,\odot):\quad \begin{array}{c|cccc} \odot & [1]_{10} & [3]_{10} & [7]_{10} & [9]_{10} \\ \hline [1]_{10} & [1]_{10} & [3]_{10} & [7]_{10} & [9]_{10} \\ [3]_{10} & [3]_{10} & [9]_{10} & [1]_{10} & [7]_{10} \\ [7]_{10} & [7]_{10} & [1]_{10} & [9]_{10} & [3]_{10} \\ [9]_{10} & [9]_{10} & [7]_{10} & [3]_{10} & [1]_{10} \end{array}$$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für endliche Gruppen bzw. Halbgruppen:

5) Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks



ρ_0 ρ_1 ρ_2 σ_l σ_r σ_o

$(S_3, \circ)$:

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_l	σ_r	σ_o
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_l	σ_r	σ_o
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	σ_o	σ_l	σ_r
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	σ_r	σ_o	σ_l
σ_l	σ_l	σ_r	σ_o	ρ_0	ρ_1	ρ_2
σ_r	σ_r	σ_o	σ_l	ρ_2	ρ_0	ρ_1
σ_o	σ_o	σ_l	σ_r	ρ_1	ρ_2	ρ_0

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für endliche Gruppen bzw. Halbgruppen:

6) ($\{x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{x-1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}\}$,∘) (Hintereinanderschaltung der Funktionen)

$(\mathbb{Q}_6, \circ)$:

$\circ$	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$
x	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$
$1-x$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	x

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für endliche Gruppen bzw. Halbgruppen:

7) $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n, +)$ *(2-dimensionale zyklische Gruppe mit koordinatenweise additiver Verknüpfung)*

$\oplus_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

$\mathbb{Z}_3^2$:

$\oplus_3$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(2,1)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Beispiele für endliche Gruppen bzw. Halbgruppen:

8) $((\mathbb{Z}_n)^r,+)$ *(r-dimensionale zyklische Gruppe mit koordinatenweise additiver Verknüpfung)*

$\mathbb{Z}_2^3$:

$\oplus_2$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$
$(0,1,0)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$
$(0,1,1)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$
$(1,0,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$
$(1,0,1)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$
$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$
$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Wann gelten zwei Gruppen als gleich?

Definition: Zwei Gruppen $(G,\oplus)$ und $(H,\odot)$ gelten als gleich (isomorph), wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $I: G \rightarrow H$ gibt, welche die Verküpfungsstruktur erhält:

$$\forall\, a,b \in G: I(a \oplus b) = I(a) \odot I(b)$$

$$\forall\, a,b \in H: I^{-1}(a \odot b) = I^{-1}(a) \oplus I^{-1}(b)$$

I wird ***Isomorphismus*** genannt.

Charakteristische Größen endlicher Gruppen:

Ordnung eines Elements: Für $a \in G$ und $m,m' \in \mathbb{N}$ sei $o(a) = m \;:\Leftrightarrow (a^m = e \wedge (a^{m'} = e \Rightarrow m' \geq m))$

Ordnung einer Gruppe: maximale Ordnung ihrer Elemente

Erzeugnis eines Elements $a \in G$: $\{a^1, a^2, \ldots, a^{o(a)}\}$ (bildet eine Untergruppe)

Definition: Gruppen, die durch ***ein*** Element erzeugt werden, heißen ***zyklisch***. **Bsp.:** $(\mathbb{Z}_n,+)$

Erzeugnis zweier Elemente $a,b \in G$: $\{c \in G \mid c = a^i \oplus b^j,\ i=1, \ldots, o(a), j=1, \ldots, o(b)\}$

(bildet eine Untergruppe)

Analog: Erzeugnis mehrerer Elemente

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.1 Gruppen

Charakteristische Invarianten endlicher Gruppen:

Satz: Jede endliche Gruppe wird durch endlich viele Elemente erzeugt.

Bemerkung: Auch unendliche Gruppen können durch endlich viele Elemente erzeugt werden (aber niemals durch ein einzelnes).

Satz: Jeder Isomorphismus bildet Elemente aufeinander ab, die dieselbe Ordnung haben.

Satz: Erzeugende Elemente werden auf erzeugende Elemente abgebildet.

Korollar: Isomorphe Gruppen enthalten für jede Ordnungszahl dieselbe Anzahl von Elementen mit dieser Ordnung.

Korollar: Isomorphe Gruppen werden durch dieselbe Zahl von Elementen erzeugt:
Die Abbildung der erzeugenden Elemente legt den Rest der Abbildung fest.

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Definition der Struktur eines Körpers:

Sei K eine nichtleere Menge und $\oplus$, $\odot$ Verknüpfungen zwischen den Elementen von G.
Dann heißt die Struktur (K, $\oplus$, $\odot$) ein **Körper**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) (K, $\oplus$) ist abelsche Gruppe mit neutralem Element e_0

2) (K, $\odot$) ist Halbgruppe

3) $\forall\, a,b,c \in K: (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
$c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$ — ***Distributivgesetze***

4) $\exists\, e_1 \in K\ \forall\, a \in K: e_1 \odot a = a \odot e_1 = a$ — ***Neutrales Element***

5) $\forall\, a \in K \setminus \{e_0\}\ \exists\, a^{-1} \in K \setminus \{e_0\}: a^{-1} \odot a = a \odot a^{-1} = e_1$ — ***Inverses Element***

6) $\forall\, a,b \in K: a \odot b = b \odot a$ — ***Kommutativgesetz***

nur Eigenschaft 1), 2), 3) (bei Lang auch 4), 6)): Ring
nur Eigenschaft 1), 2), 3), 4), 6) + Nullteilerfreiheit: Integritätsbereich
nur Eigenschaft 1), 2), 3), 4), 5): Schiefkörper

Vorbilder: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ für einen unendlichen Körper $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ für einen endlichen Körper

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Beispiele von unendlichen Körpern, Ringen, etc.:

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

3) $(\mathbb{R} \setminus \{0\},+,\cdot)$

4) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\},+,\cdot)$

5) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f bijektiv$\},+,\circ)$

6) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f bijektiv$\},\circ,+)$

7) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f linear$\},+,\cdot)$

8) $(\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f Polynomfunktion$\},+,\cdot)$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Endliche Körper:

1) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p

2) $((\mathbb{Z}_p)^r,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p und beliebige natürliche Zahl r

Satz (Galois, 1811-1832): ***Das sind alle!***

Endliche Körper gibt es nur mit p^r Elementen (p Primzahl, r natürliche Zahl).
Jeder endliche Körper ist bis auf Isomorphie gleich zu den oben genannten.
Der Körper mit q Elementen wird GF (q) genannt (GF = Galoisfeld)

Wie sieht die multiplikative Verknüpfung für r > 1 aus ?

Satz:

Die multiplikative Gruppe des Körpers $((\mathbb{Z}_p)^r,+,\cdot)$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}_{p^r-1},+)$.

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Endliche Körper:

1) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p

2) $((\mathbb{Z}_p)^r,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p und beliebige natürliche Zahl r

Bsp.: $(\mathbb{Z}_2)^3$ Additionsgruppe

$\mathbb{Z}_2^3$:

$\oplus_2$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,0,0)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$
$(0,1,0)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$
$(0,1,1)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$
$(1,0,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$
$(1,0,1)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$
$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$
$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(0,0,0)$

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Endliche Körper:

1) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p

2) $((\mathbb{Z}_p)^r,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p und beliebige natürliche Zahl r

Bsp.: $(\mathbb{Z}_2)^3$ Versuch mit einer zyklischen Gruppe für die Multiplikation

$\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:
(falscher Versuch)

$\odot$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(0,1,0)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$
$(0,1,1)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$
$(1,0,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$
$(1,0,1)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$
$(1,1,0)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$
$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	(1, 1, 0)

Leider ist das Distributivgesetz verletzt! ☹

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Endliche Körper:

1) $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p

2) $((\mathbb{Z}_p)^r,+,\cdot)$ für beliebige Primzahl p und beliebige natürliche Zahl r

Bsp.: $(\mathbb{Z}_2)^3$ Erfolgreicher Versuch einer zyklischen Gruppe für die Multiplikation

$\odot_2^g$	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,1,0)	(0,0,0)	(0,1,0)	(1,0,0)	(1,1,0)	(0,1,1)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,0,1)
(0,1,1)	(0,0,0)	(0,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,1,1)	(1,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)
(1,0,0)	(0,0,0)	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(0,1,0)	(1,0,1)	(0,0,1)
(1,0,1)	(0,0,0)	(1,0,1)	(0,0,1)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,1)	(0,1,1)	(1,1,0)
(1,1,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(1,1,1)	(0,0,1)	(1,0,1)	(0,1,1)	(0,1,0)	(1,0,0)
(1,1,1)	(0,0,0)	(1,1,1)	(1,0,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(1,0,0)	(0,1,1)

Wie kamen wir darauf?

➔ Konstruktionsanleitung mit Hilfe von Polynomen

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Definition Polynom für einen beliebigen Körper K:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Hierbei steht x für eine Variable mit Definitionsbereich K, a_i für eine beliebige Konstante aus K und x^i bedeutet die i-fache Hintereinanderschaltung der multiplikativen Verknüpfung angewendet auf das Körperelement x.
Ein Polynom ist durch die Angabe des Tupels $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ eindeutig charakterisiert.

Das größte n mit $a_n \neq 0$ wird als *Grad des Polynoms* bezeichnet.
Die Menge der Polynome über einem Körper K wird mit K[x] bezeichnet.

Satz:

(K[x],+,·) bildet einen Ring (sogar einen Integritätsbereich).

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Weitere Definitionen:

Eine ***Nullstelle*** zu einem gegebenen Polynom ist ein Wert des Körpers K, dessen Einsetzung in das Polynom den Wert 0 ergibt.

Ein ***Polynom*** f[x] über einem Körper K heißt **reduzibel**, wenn es zwei Polynome g[x], h[x] in K[x] gibt mit f[x] = g[x]·h[x] (übliche Polynommultiplikation). Wenn es keine solche Zerlegungsmöglichkeit gibt, heißt f[x] **irreduzibel**.

Satz: f[x] ist irreduzibel ⇒ f[x] hat keine Nullstelle

Für Polynome f[x] mit Grad ≤ 3 gilt sogar: f[x] ist irreduzibel ⇔ f[x] hat keine Nullstelle.

Polynomdivision mit Rest:

Seien f[x], g[x] Polynome.
Dann gibt es Polynome q[x], r[x] mit Grad (r[x]) < Grad (g[x]):

$$f[x] = q[x] \cdot g[x] + r[x]$$

Die Polynome q[x], r[x] werden analog zum schriftlichen Divisionsverfahren von Zahlen gebildet. (Euklidischer Algorithmus).
Analog zur Definition bei Zahlen wird das Restpolynom r[x] auch f[x] mod g[x] genannt.

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Konstruktionsanleitung für GF (q) mit $q = p^r$ (p Primzahl, r natürliche Zahl):

1) Bestimme die Additions- und Multiplikationstabellen von GF (p):
Dieser *Primkörper* ist isomorph zum Restklassenkörper $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$.

2) Identifiziere die Elemente aus GF (q) mit den p^r verschiedenen Polynomen über $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ mit Grad < r

3) Bilde die Additionstabelle wie bei Polynomen üblich.
(Anmerkung: Die entstehende Gruppe ist isomorph zu $((\mathbb{Z}_p)^r,+)$)

4) Wähle ein irreduzibles Polynom g[x] über GF (p) mit Grad = r.
Bilde die Multiplikationstabelle wie bei Polynomen üblich,
aber *rechne modulo g[x]*, um jeweils Polynome mit Grad < r zu erzeugen.
(Anmerkung: Die entstehende Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}_{q-1},+)$)

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Beispiel: GF (8) $8 = 2^3$ (p =2, r=3)

Der Primkörper ist also GF(2)

Elemente: {0, 1 , x , x+1 , x^2 , x^2+1, x^2+x, x^2+x+1}

0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7

Alle Polynome mit Grad < 3

Irreduzibles Polynom: x^3+x+1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	3	1	7	5
3	0	3	6	5	7	4	1	2
4	0	4	3	7	6	2	5	1
5	0	5	1	4	2	7	3	6
6	0	6	7	1	5	3	2	4
7	0	7	5	2	1	6	4	3

5. Algebraische Strukturen für Zahlenmengen

5.2 Körper

Beispiel: GF (9) $9 = 3^2$ (p =3, r=2)

Der Primkörper ist also GF(3)

Elemente: {0, 1 , 2 , x , x+1 , x+2 , 2x , 2x+1, 2x+2}

Alle Polynome mit Grad < 2

0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8

Irreduzibles Polynom: x^2+1

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	5	6	1	7	2	3
5	0	5	7	8	1	3	4	6	2
6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	0	7	5	4	2	6	8	3	1
8	0	8	4	7	3	2	5	1	6