

# ***Computer Algebra***

Sebastian Iwanowski  
FH Wedel

3. Modulare Arithmetik  
3.1 Berechnung modularer Funktionen

## **Referenzen zum Nacharbeiten:**

Köpf 4 (außer 4.3, 4.6)

von zur Gathen 4.1, 4.2

Seminararbeit 3 (Thomas Stuh) )

Seminararbeit 4 (Hendrik Annuth)

# Computer Algebra 3

## Restklassen

Die bekannteste Restklassenmenge überhaupt:

Für die späteren Stunden des Tages gibt es zwölf Äquivalenzklassen.

$$\mathbb{C}_{12}^{\star} = \{ [0]_{12}; [1]_{12}; [2]_{12}; [3]_{12}; [4]_{12}; [5]_{12}; [6]_{12}; [7]_{12}; [8]_{12}; [9]_{12}; [10]_{12}; [11]_{12} \}$$

Die Uhrzeiten 0, 12 und 24 Uhr bezeichnen die gleiche Uhrzeit, sie sind in einer Äquivalenzklasse und bilden ein Restklasse innerhalb der Restklassenmenge



aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Restklassen

### Rechnen mit Restklassen

$$|\mathbb{Z}_{12}| = 12$$

$$\mathbb{Z}_{12} = \{ [0]_{12}; [1]_{12}; [2]_{12}; [3]_{12}; [4]_{12}; [5]_{12}; \\ [6]_{12}; [7]_{12}; [8]_{12}; [9]_{12}; [10]_{12}; [11]_{12} \}$$

$$[0]_{12} = \{ \dots; -24; -12; 0; 12; 24; \dots \}$$

$$[8]_{12} = \{ \dots; 16; 4; 8; 20; 32; \dots \}$$

$$[8]_{12} + [11]_{12} = [7]_{12}, \text{ denn } 8 + 11 = 19 = 12 \cdot 1 + 7 \Rightarrow 19 \in [7]_{12}$$

$$[4]_{12} * [8]_{12} = [8]_{12}, \text{ denn } 4 * 8 = 32 = 12 \cdot 2 + 8 \Rightarrow 32 \in [8]_{12}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Restklassen

$$[x]_{12} * [2]_{12} = [10]_{12}$$

Suche nach  $[„10/2“]_{12}$

$$\begin{aligned} [2]_{12} * [0]_{12} &= [0]_{12} \\ [2]_{12} * [1]_{12} &= [2]_{12} \\ [2]_{12} * [2]_{12} &= [4]_{12} \\ [2]_{12} * [3]_{12} &= [6]_{12} \\ [2]_{12} * [4]_{12} &= [8]_{12} \\ [2]_{12} * [5]_{12} &= [10]_{12} \\ [2]_{12} * [6]_{12} &= [0]_{12} \\ [2]_{12} * [7]_{12} &= [2]_{12} \\ [2]_{12} * [8]_{12} &= [4]_{12} \\ [2]_{12} * [9]_{12} &= [6]_{12} \\ [2]_{12} * [10]_{12} &= [8]_{12} \\ [2]_{12} * [11]_{12} &= [10]_{12} \end{aligned}$$

Zwei Lösungen gefunden,  
aber nur durch probieren

$$[2]_{12} * [x]_{12} = [7]_{12}$$

Modulare Division ist nicht effizient lösbar.  
Außerdem kann man die Operation „\*2“  
in  $\mathbb{Z}_{12}$  nicht für jedes Ergebnis invertieren!

nach: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Restklassen

Beispiel für eine Restklassenmenge  $\mathbb{Z}_p$   
mit vollständig und eindeutig definierter Division:

$(\mathbb{Z}_7, +)$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$(\mathbb{Z}_7, *)$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

In  $\mathbb{Z}_7$  kann man die Operation „\*“  
für jeden Operanden und jedes Ergebnis invertieren:  
Geht es auch effizient, d.h. besser als durch Probieren?

nach: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Restklassen

Division über Bestimmung des Inversen:

$(\mathbb{Z}_7, *)$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$$2 * x \equiv 10 \pmod{7}$$

$$a \equiv 2 \pmod{7}$$

$$a^{-1} \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2 * x \equiv 10 \pmod{7} \quad | *4$$

$$4 * 2 * x \equiv 4 * 10 \pmod{7}$$

$$1 * x \equiv 40 \equiv 5 * 7 + \underline{\underline{5}} \pmod{7}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Restklassen

Division über Bestimmung des Inversen:

- Inversenbestimmung über erweiterten Euklidischen Algorithmus

Berechnet  $a^{-1} \bmod n$ , wenn  $\text{ggt}(a,n) = 1$

⇒ funktioniert für alle  $a \in \mathbb{Z}_n$ , wenn  $n$  eine Primzahl ist

Laufzeit:  $O(n^2)$

Fazit:

- Modulare Multiplikation immer effizient
- Modulare Division auch effizient für Primzahlmoduli
- Modulare Division für zusammengesetzte Moduli  $n = p \cdot q$ :
  - $\text{ggt}(a,n) = 1$ : effizient
  - $\text{ggt}(a,n) > 1$ : kein effizienter Algorithmus bekannt!

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen

Wir werden drei Operationen im Speziellen betrachten

Potenzieren

Radizieren

Logarithmieren

aus: Seminarvortrag Annuth



# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Potenzen

Potenzen am Beispiel von  $\mathbb{Z}_7$   
(mod 7) zur besseren Lesbarkeit weggelassen

$1^1 \equiv 1$	$2^1 \equiv 2$	$3^1 \equiv 3$	$4^1 \equiv 4$	$5^1 \equiv 5$	$6^1 \equiv 6$
$1^2 \equiv 1$	$2^2 \equiv 4$	$3^2 \equiv 2$	$4^2 \equiv 2$	$5^2 \equiv 4$	$6^2 \equiv 1$
$1^3 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$	$3^3 \equiv 6$	$4^3 \equiv 1$	$5^3 \equiv 6$	$6^3 \equiv 6$
$1^4 \equiv 1$	$2^4 \equiv 2$	$3^4 \equiv 4$	$4^4 \equiv 4$	$5^4 \equiv 2$	$6^4 \equiv 1$
$1^5 \equiv 1$	$2^5 \equiv 4$	$3^5 \equiv 5$	$4^5 \equiv 2$	$5^5 \equiv 3$	$6^5 \equiv 6$
$1^6 \equiv 1$	$2^6 \equiv 1$	$3^6 \equiv 1$	$4^6 \equiv 1$	$5^6 \equiv 1$	$6^6 \equiv 1$

Wir erreichen nicht alle Restklassen  
Erzeugende Elemente  
Es scheint  $a^{(7-1)} = 1$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Potenzen

### Kleiner Satz von Fermat

Sei  $p \in \mathbb{P}$ , dann gilt

$$x^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Beweis durch Induktion über  $x$

1.  $x^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \mid *x$

Behauptung:  $x^p \equiv x \pmod{p}$

2. Verankerung:  $x$  sei 0  $0^p \equiv 0 \pmod{p}$

3. Zu zeigen:  $(x + 1)^p \equiv x + 1$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Potenzen

Zu zeigen:  $(x + 1)^p \equiv x + 1$

$$(x + 1)^p \equiv x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} x^1 + 1 \pmod{p}$$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)! * k!} = \frac{p * (p-1)!}{(p-k)! * k!}$$

$$(x + 1)^p \equiv x^p + p * \left( \frac{(p-1)!}{(p-1)! * 1!} x^{p-1} + \frac{(p-1)!}{(p-2)! * 2!} x^{p-2} + \dots + \frac{(p-1)!}{1! * (p-1)!} x^1 \right) + 1 \pmod{p}$$

$$(x + 1)^p \equiv x^p + 1 \pmod{p} \wedge x^p \equiv x \pmod{p} \Rightarrow \underline{\underline{(x + 1)^p \equiv x + 1 \pmod{p}}}$$

q.e.d.

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Quadratwurzeln am Beispiel von  $\mathbb{Z}_7$

$$\sqrt{4} \equiv 2 \pmod{7} \quad \wedge \quad \sqrt{4} \equiv (7 - 2) \equiv 5 \pmod{7}$$

$$5^2 = 25 = 3 * 7 + \underline{4}$$

$$-2 \in [5]_7$$

$$x^2 \equiv (x - p)^2 \equiv x^2 - 2xp + p^2 \equiv x^2 - p(2x - p) \equiv x^2 \pmod{p}$$

$$\sqrt{1} \equiv \{1;6\}; \sqrt{2} \equiv \{3;4\}; \sqrt{3} \equiv ?; \sqrt{4} \equiv \{2;5\}; \sqrt{5} \equiv ?; \sqrt{6} \equiv ? \pmod{7}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Quadratwurzelstruktur am Beispiel von  $\mathbb{Z}_7$   
 (mod 7) zur besseren Lesbarkeit weggelassen

$1^1 \equiv 1$	$2^1 \equiv 2$	$3^1 \equiv 3$	$4^1 \equiv 4$	$5^1 \equiv 5$	$6^1 \equiv 6$
$1^2 \equiv 1$	$2^2 \equiv 4$	$3^2 \equiv 2$	$4^2 \equiv 2$	$5^2 \equiv 4$	$6^2 \equiv 1$
$1^3 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$	$3^3 \equiv 6$	$4^3 \equiv 1$	$5^3 \equiv 6$	$6^3 \equiv 6$
$1^4 \equiv 1$	$2^4 \equiv 2$	$3^4 \equiv 4$	$4^4 \equiv 4$	$5^4 \equiv 2$	$6^4 \equiv 1$
$1^5 \equiv 1$	$2^5 \equiv 4$	$3^5 \equiv 5$	$4^5 \equiv 2$	$5^5 \equiv 3$	$6^5 \equiv 6$
$1^6 \equiv 1$	$2^6 \equiv 1$	$3^6 \equiv 1$	$4^6 \equiv 1$	$5^6 \equiv 1$	$6^6 \equiv 1$

$$\sqrt{1} \equiv \{1;6\}; \sqrt{2} \equiv \{3;4\}; \sqrt{3} \equiv ?; \sqrt{4} \equiv \{2;5\}; \sqrt{5} \equiv ?; \sqrt{6} \equiv ? \pmod{7}$$

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a \text{ hat eine Quadratwurzel?}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Quadratwurzelstruktur am Beispiel von  $\mathbb{Z}_7$   
 (mod 7) zur besseren Lesbarkeit weggelassen

$1^1 \equiv 1$	$2^1 \equiv 2$	$3^1 \equiv 3$	$4^1 \equiv 4$	$5^1 \equiv 5$	$6^1 \equiv 6$
$1^2 \equiv 1$	$2^2 \equiv 4$	$3^2 \equiv 2$	$4^2 \equiv 2$	$5^2 \equiv 4$	$6^2 \equiv 1$
$1^3 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$	$3^3 \equiv 6$	$4^3 \equiv 1$	$5^3 \equiv 6$	$6^3 \equiv 6$
$1^4 \equiv 1$	$2^4 \equiv 2$	$3^4 \equiv 4$	$4^4 \equiv 4$	$5^4 \equiv 2$	$6^4 \equiv 1$
$1^5 \equiv 1$	$2^5 \equiv 4$	$3^5 \equiv 5$	$4^5 \equiv 2$	$5^5 \equiv 3$	$6^5 \equiv 6$
$1^6 \equiv 1$	$2^6 \equiv 1$	$3^6 \equiv 1$	$4^6 \equiv 1$	$5^6 \equiv 1$	$6^6 \equiv 1$

$$\sqrt{1} \equiv \{1;6\}; \sqrt{2} \equiv \{3;4\}; \sqrt{3} \equiv ?; \sqrt{4} \equiv \{2;5\}; \sqrt{5} \equiv ?; \sqrt{6} \equiv ? \pmod{7}$$

$$a^{(p-1)/2} \equiv (p-1) \pmod{p} \Rightarrow a \text{ hat keine Quadratwurzel?}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Warum ist das so?

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a \text{ Hat eine Quadratwurzel}$$

$$a^{(p-1)/2} \equiv (p-1) \pmod{p} \Rightarrow a \text{ Hat keine Quadratwurzel}$$

Das Element 1 wird in den Potenzen jedes Elements definiert,  
denn:  $1 \equiv 2^6 \equiv 3^6 \equiv 4^6 \equiv 5^6 \equiv 6^6 \pmod{7}$

Da der Exponent 6 gerade ist, kann die Wurzel gezogen werden

$$\sqrt{1} \equiv \{1; -1\} \wedge -1 \in [p-1]_p$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Können erzeugende Elemente nie Quadratwurzeln haben?

Erzeugende Elemente  
enthalten alle Vorhandenen  
Wurzeln mit geraden  
Exponenten

$$\sqrt{2} \equiv \{3;4\};$$

$$\sqrt{4} \equiv \{2;5\};$$

$$\sqrt{1} \equiv \{1;6\};$$

$$3^1 \equiv 3$$

$$3^2 \equiv 2$$

$$3^3 \equiv 6$$

$$3^4 \equiv 4$$

$$3^5 \equiv 5$$

$$3^6 \equiv 1$$

Erzeugende Elemente  
enthalten sich selbst  
und alle anderen erzeugenden  
Elemente, bzw. hier auch  
das letzte Element nur mit  
einem ungeraden Exponenten

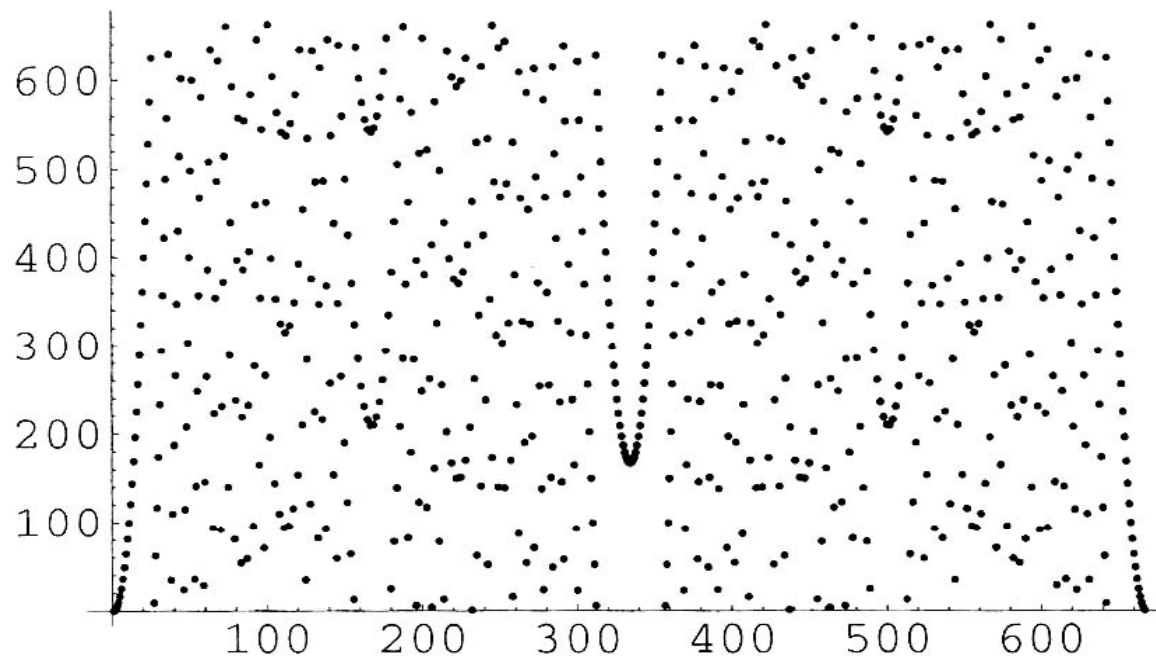
aus: Seminarvortrag Annuth



# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Quadrate am Beispiel von  $\mathbb{Z}_{667}$   $f(x) = x^2$



Anfangs bekannte  
Parabelform

Symmetrie durch  
 $x^2 \equiv (x - p)^2 \pmod{p}$

Es gibt auch mächtigere  
Lösungsmengen als 2,  
wenn  $\mathbb{Z}_n$  wie hier  $n = p \cdot q$   
 $667 = 23 \cdot 29$

$$\sqrt{506} = \{62; 315; 352; 602\}$$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen: Quadratwurzeln

Die modulare Quadratwurzel berechnen

Sei bekannt  $a \in \mathbb{Z}_n$

Sei gesucht  $x \in \mathbb{Z}_n$

Innerhalb einer Restklassenmenge mit einer Primzahl  $n$  als Modulus gibt es effiziente Berechnungsschemata

Ist  $n=p \cdot q$  entsprechend groß (200stellig), ist  $\sqrt{a} \equiv x \pmod{n}$  auch für moderne Rechensysteme nur in extrem langer Zeit (Jahren) zu berechnen. Hierbei sollte  $x^2 > n$  sein, d.h. Lösungen  $x$  zwischen 0 und  $\sqrt{n}$  sind zu vermeiden, weil diese durch numerische Methoden in  $\mathbb{Z}$  bestimmt werden können.

Auf der anderen Seite ist die Umkehrfunktion, das Quadrieren, extrem einfach zu berechnen:  $a^2 \equiv x \pmod{n}$

nach: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen

### Logarithmen am Beispiel von $\mathbb{Z}_7$

Frage: mit welchem Element muss 2 potenziert werden, damit 4 herauskommt? Oder  $2^x \equiv 4 \pmod{7}$

Antwort:  $\log_2 4 \equiv 2 \pmod{7}$  denn  $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$

und  $\log_2 4 \equiv 5 \pmod{7}$  denn  $2^5 \equiv 32 \equiv 4 * 7 + 4 \equiv 4 \pmod{7}$

Frage:  $2^x \equiv 5 \pmod{7}$

Antwort:  $\log_2 5 \equiv ? \pmod{7}$  also keine Lösung

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen

Logarithmenstruktur am Beispiel von  $\mathbb{Z}_7$   
(mod 7) zur besseren Lesbarkeit weggelassen

$1^1 \equiv 1$	$2^1 \equiv 2$	$3^1 \equiv 3$	$4^1 \equiv 4$	$5^1 \equiv 5$	$6^1 \equiv 6$
$1^2 \equiv 1$	$2^2 \equiv 4$	$3^2 \equiv 2$	$4^2 \equiv 2$	$5^2 \equiv 4$	$6^2 \equiv 1$
$1^3 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$	$3^3 \equiv 6$	$4^3 \equiv 1$	$5^3 \equiv 6$	$6^3 \equiv 6$
$1^4 \equiv 1$	$2^4 \equiv 2$	$3^4 \equiv 4$	$4^4 \equiv 4$	$5^4 \equiv 2$	$6^4 \equiv 1$
$1^5 \equiv 1$	$2^5 \equiv 4$	$3^5 \equiv 5$	$4^5 \equiv 2$	$5^5 \equiv 3$	$6^5 \equiv 6$
$1^6 \equiv 1$	$2^6 \equiv 1$	$3^6 \equiv 1$	$4^6 \equiv 1$	$5^6 \equiv 1$	$6^6 \equiv 1$



Für erzeugende Elemente ergibt sich  
eine eindeutige Abbildung.

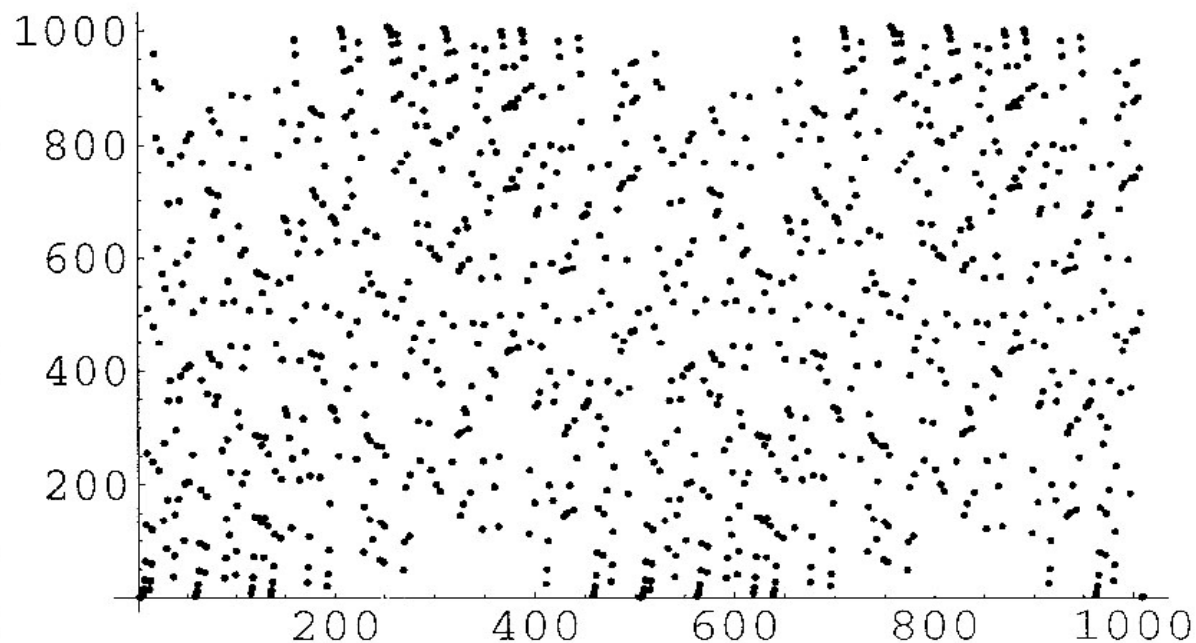
Nicht alle Elemente aus  $\mathbb{Z}_7$  sind nicht erreichbar, z.B.  $\log_2 5 \equiv ?$   
Einige Elemente sind doppelt erreichbar.

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen

Potenzen am Beispiel von  $\mathbb{Z}_{1009} f(x) = 2^x$



Anfangs bekannte  
Exponentialsteigung

Graph ist hier periodisch  
zu einem Teiler von  
 $(n-1) = (1009-1)$   
Hier  $1008/2 = 504$

aus: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Weitere Operationen in Restklassen

### Den modularen Logarithmus berechnen

Sei bekannt  $a \in \mathbb{Z}_n$

Sei gesucht  $x \in \mathbb{Z}_n$

Ist  $n$  entsprechend groß (2007: mindestens 200stellig) ist  $\log_b a \equiv x \pmod{n}$  auch für moderne Rechensysteme nur in extrem langer Zeit (Jahren) zu berechnen. Hierbei sollte  $b^x > n$  sein. Anderenfalls könnte eine Lösung  $x$  durch numerische Methoden in  $\mathbb{Z}$  bestimmt werden.

Auf der anderen Seite ist die Umkehrfunktion, die Potenz, extrem einfach zu berechnen:  $b^a \equiv x \pmod{n}$

nach: Seminarvortrag Annuth

# Computer Algebra 3

## Zusammenfassung: Operationen der modularen Arithmetik

- Finden von multiplikativen Inversen  $b/a \pmod n$  (modulare Division):

Umkehroperation der Multiplikation. Diese ist für jedes  $n$  effizient lösbar.

Algorithmen zur Division:

für Primzahlmoduli  $n$ :  $O(\#n^2)$  mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus

für zusammengesetzte Moduli  $n$ ,  $\text{ggT}(a,n) = 1$ : wie oben

für zusammengesetzte Moduli  $n$ ,  $\text{ggT}(a,n) > 1$ : kein effizienter Algorithmus bekannt

- Finden von Quadratwurzeln  $\pmod n$

Umkehroperation des Quadrierens. Dieses ist für jedes  $n$  effizient lösbar.

Algorithmen zum Wurzelziehen:

für Primzahlmoduli: es gibt polynomielle Verfahren (nicht trivial)

für zusammengesetzte Moduli  $n$ : kein effizienter Algorithmus bekannt

- Finden von Logarithmen  $\pmod n$

Umkehroperation des Potenzierens. Dieses ist für jedes  $n$  effizient lösbar

Algorithmen zum Logarithmieren:

Für kein Modulus  $n$  ist ein effizienter Algorithmus bekannt.