Multiagentensysteme

Entscheidungsfindung für den Gruppenvorteil

Agenda

- **Einleitung**
- **Treffen von Gruppenentscheidungen (Wahltheorie)**
- **Bildung von Koalitionen**
- **Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme**

Einleitung

- Ein Agent ist z. B. eine Person oder ein Programm(-teil)
- Durch Zusammenarbeit kann Mehrwert erreicht werden
- Wer arbeitet mit wem zusammen?
- Wie wird eine gemeinsame Entscheidung getroffen?

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Notationen**
  - Endliche Menge von Agenten: $Ag = \{1, \ldots, n\}$
  - Endliche Menge von möglichen Ergebnissen / Kandidaten: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
  - Agenten haben Präferenzreihenfolge über Ω, z. B.: $(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$; d. h. Agent i zieht das Ergebnis ω_3 dem Ergebnis ω_1 vor: $\omega_3 \succ \omega_1$
  - Präferenzreihenfolge ist transitiv und vollständig

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Notationen**
  - Präferenzreihenfolge der Agenten 1, ..., n: $\omega_1, \ldots, \omega_n$
  - In der Präferenzreihenfolge ω_i von Agent i ist das Ergebnis ω vor dem Ergebnis ω' eingeordnet: $\omega \succ_i \omega'$
  - Menge aller Präferenzreihenfolgen über Ω: $\Pi(\Omega)$

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Problem der Aggregation in der Sozialwahltheorie**
  - Soziale Wohlfahrtsfunktionen
    - $f_W : \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ Mal} \rightarrow \Pi(\Omega)$
    - Ergebnis ist die „soziale Präferenzreihenfolge"
    - ω ist in dem Ergebnis über ω' angeordnet: $\omega \succ^{*} \omega'$
  - Soziale Auswahlfunktionen
    - $f_A : \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ Mal} \rightarrow \Omega$
    - Ergebnis ist ein Kandidat

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Mehrheitswahl
    - Wahl eines Kandidaten als Ergebnis
    - „Einfache Mehrheitswahl", wenn $|\Omega| = 2$
    - Bei $|\Omega| > 2$ können Anomalien auftreten

      Beispiel: $|Ag| = 10, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
      - 3 Personen wählen ω_1
      - 3 Personen wählen ω_2
      - 4 Personen wählen ω_3

      => Ergebnis ω_3 wird gewählt, obwohl 60% (die Mehrheit) ω_3 nicht gewählt hat

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Mehrheitswahl
    - Strategische Manipulation

      Beispiel: $|Ag| = 10, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

      - 2 Personen, die ω_1 präferieren, wählen taktisch ω_2
      - ω_2 erhält dadurch 5 Stimmen
      - 4 Personen wählen weiterhin ω_3

      => Ergebnis ω_2 wird jetzt gewählt

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Mehrheitswahl
    - Condorcet-Paradoxon:
      Die einzelnen Präferenzreihenfolgen sind transitiv, das Abstimmungsergebnis ist aber zyklisch.

      Beispiel:

      $$\omega_1 \succ_1 \omega_2 \succ_1 \omega_3$$
      $$\omega_2 \succ_2 \omega_3 \succ_2 \omega_1$$
      $$\omega_3 \succ_3 \omega_1 \succ_3 \omega_2$$

      => Es gibt keinen eindeutigen Gewinner!

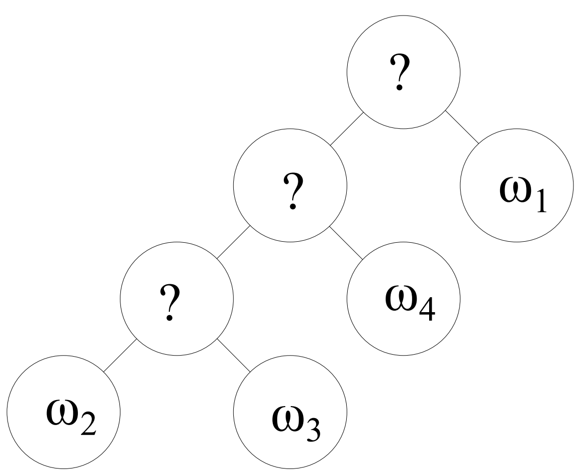
      => Schlecht: Für jeden Kandidaten gibt es eine Gegenmehrheit von 66,7%

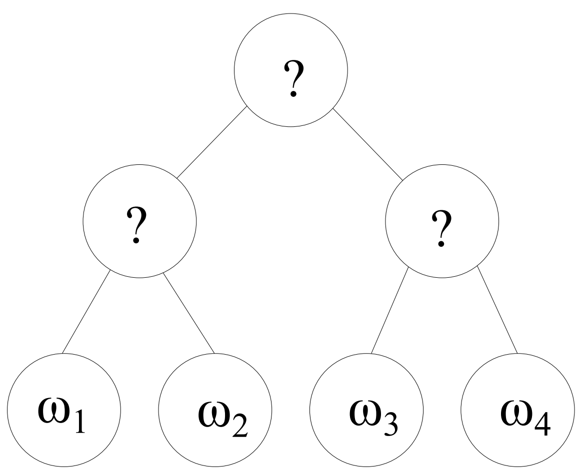
Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Sequentielle Mehrheitswahl
    - Aufbau einer Wahlagenda:

      Bsp.: $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_1$

      linear: ausgewogener Binärbaum:





Quelle: Wooldridge: An Introduction to MultiAgent Systems - Second Edition (2009), S. 257

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Borda-Wahl
    - Jeder Kandidat erhält einen numerischen Wert entsprechend seiner Position in allen Präferenzreihenfolgen
    - Von $k = |\Omega| - 1$ bis 0 absteigend
    - Zur Auswertung werden die Kandidaten nach den addierten Werten absteigend sortiert
    - Gewinner ist der Kandidat mit den meisten Punkten

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Slater Rangordnung
    - Findet die soziale Rangordnung ohne Zyklen, die dem Mehrheitsgraphen am nähesten entspricht
    - Für jede soziale Rangordnung wird gezählt wie viele Kanten umgedreht werden müssen (= Kosten), um einen konsistenten Graphen zu erhalten
    - Die Rangordnung mit den geringsten Kosten wird gewählt
    - Berechnung ist NP-hart

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Abstimmungsverfahren**
  - Slater Rangordnung
    - Bsp.: $\omega_1 \succ^* \omega_2 \succ^* \omega_3 \succ^* \omega_4$

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Wünschenswerte Eigenschaften**
  - Pareto Bedingung
    - Wenn alle Wähler ω_i über ω_j ordnen, dann gilt $\omega_i \succ^* \omega_j$
  - Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen
    - Wenn $\omega_i \succ^* \omega_j$ gilt, dann gilt es auch, wenn Agenten ihre Präferenzreihenfolge ändern, aber die relative Ordnung von ω_i und ω_j erhalten bleibt

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Wünschenswerte Eigenschaften**
  - Condorcet Sieger Bedingung
  - Diktatur
    - Nicht wünschenswert
    - Soziale Wohlfahrtsfunktion für Agent i:
      $f_W(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i$

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Arrow-Theorem**
  - Kernaussage:

    Es gibt keine „guten“ Sozialwahlverfahren!

Treffen von Gruppenentscheidungen

- **Strategische Manipulation**
  - Eine soziale Auswahlfunktion ist manipulierbar, wenn für einen Agenten i eine Präferenzreihenfolge ω_i' existiert, so dass
    $$f_A(\omega_1, \ldots, \omega_i', \ldots, \omega_n) \succ_i f_A(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n)$$
  - Gibbard-Satterthwaite Theorem
    - Jeder Entscheidungsmechanismus mit mindestens drei Kandidaten ist entweder manipulierbar oder diktatorisch

Treffen von Gruppenentscheidungen

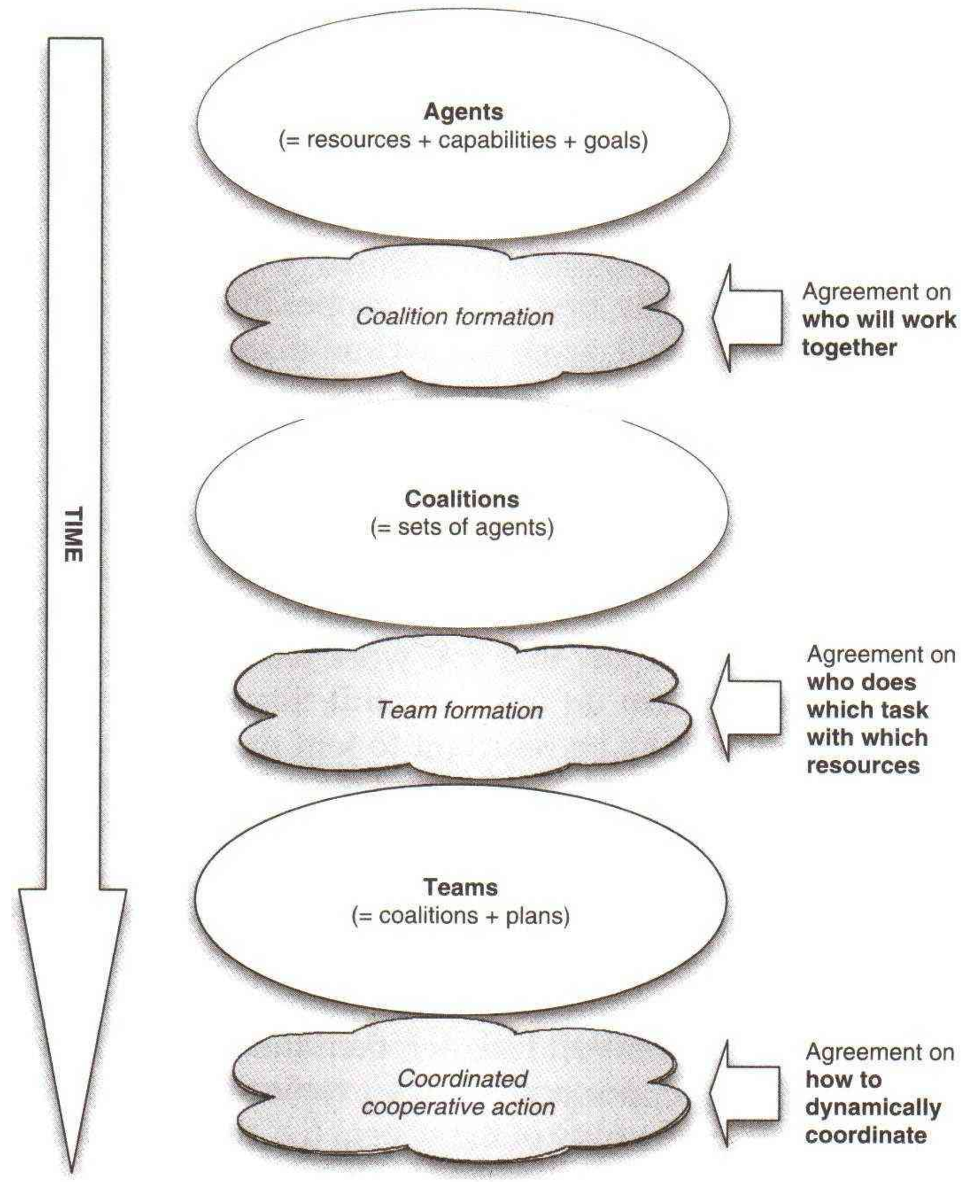
- **Strategische Manipulation**
  - Ziel: Verfahren in der wahrheitsgemäße Aussagen rational sind
  - Offenbarungsprinzip (von Osborne u. Rubinstein)
    - Wenn wir ein Verfahren für eine soziale Auswahlfunktion haben, existiert auch ein entsprechendes Verfahren, in der wahrheitsgemäße Aussagen rational sind

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Formalisierung
    - Kooperatives (oder Koalitions-) Spiel: $\Gamma = \langle Ag, v \rangle$
    - Charakteristik des Spiels: $v : 2^{Ag} \to \mathbb{R}$
    - Endliche Menge von Agenten: $Ag = \{1, \ldots, n\}$
    - Teilmenge von Ag heißt Koalition: $C, C', C1, \ldots$
    - Große Koalition: $C = Ag$

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Koalitionslebenszyklus
    - Bildung der Koalitionsstruktur
    - Lösung des Optimalitätsproblems von jeder Koalitionen
    - Teilen des Wertes der Lösung auf jede Koalition



Quelle: Wooldridge: An Introduction to MultiAgent Systems - Second Edition (2009), S. 272

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Der Kern
    - Menge aller möglichen Auszahlungsvektoren, die von keiner Koalition abgelehnt wird
    - Ergebnis einer Koalition $C = \{1,\ldots,k\}$ in einem Spiel:

      $x = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ wobei gilt, dass $\sum_{i \in C} x_i = v(C)$
    - Beispiel: $Ag = \{1, 2\}, \; v(\{1\}) = 2, \; v(\{2\}) = 2, \; v(\{1,2\}) = 6$

      Mögliche Verteilungen des Nutzens:

$$\langle 6,0 \rangle, \; \langle 5,1 \rangle, \; \underbrace{\langle 4,2 \rangle, \; \langle 3,3 \rangle, \; \langle 2,4 \rangle,}_{\text{im Kern}} \; \langle 1,5 \rangle, \; \langle 0,6 \rangle$$

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Der Kern
    - Hauptprobleme
      - Was passiert, wenn der Kern leer ist?
      - Der Kern ist nicht leer, aber „unfair“
      - Bewertung aller möglichen Koalitionen: $2^{|Ag|} - 1$ Teilmengen

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Shapley-Wert
    - Marginaler Beitrag (Mehrwert) von i zu $C \subseteq Ag \setminus \{i\}$:
      $\mu_i(C) = v(C \cup \{i\}) - v(C)$
    - Fairness-Axiome
      - Symmetrie
      - Dummy-Spieler
      - Additivität

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Shapley-Wert
    - Symmetrie-Axiom:
      - Jeder Agent erhält ausschließlich entsprechend seines Beitrages eine Auszahlung
    - Dummy-Spieler-Axiom
      - Ein Agent, der mit keiner Koalition eine Synergie hat, erhält nur das, was er alleine verdient
    - Additivitätsaxiom

$\Gamma^1 = \langle Ag, v^1 \rangle, \quad \Gamma^2 = \langle Ag, v^2 \rangle$

$\Gamma^{1+2} = \langle Ag, v^{1+2} \rangle$ wobei $v^{1+2}(C) = v^1(C) + v^2(C)$

=> für Agent i: $sh_i^{1+2} = sh_i^1 + sh_i^2$

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Shapley-Wert
    - Idee: Ein Agent soll den durchschnittlichen marginalen Beitrag erhalten, den er zu einer Koalition hinzufügt:

$$\frac{1}{2^{|Ag|-1}} \cdot \sum_{C \subseteq Ag \setminus \{i\}} \mu_i(C)$$

Bildung von Koalitionen

- **Kooperative Spiele**
  - Shapley-Wert
    - Alle möglichen Positionen von Agent i in den Koalitionen müssen berücksichtigt werden
    - Menge aller möglichen Anordnungen der Agenten in Ag: $\Pi(Ag)$
    - Beispiel:

      $\Pi(Ag=\{1,2,3\})=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

      Wenn $o \in \Pi(Ag)$ dann sind $C_i(o)$ die Agenten, die vor i in der Reihenfolge o sind:

      $o=(3,1,2)$, dann $C_3(o)=\{\}$, $C_1(o)=\{3\}$, $C_2(o)=\{1,3\}$

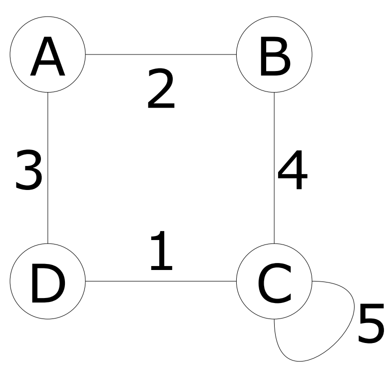
Bildung von Koalitionen

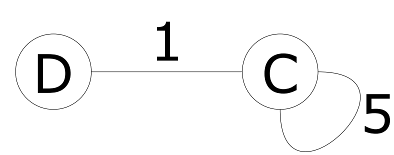
- **Kooperative Spiele**
  - Shapley-Wert
    - Shapley-Wert für Agent i:

$$sh_i = \frac{1}{|Ag|!} \cdot \sum_{o \in \Pi(Ag)} \mu_i(C_i(o))$$

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Modulare Darstellung**
  - Induzierte Teilgraphen
    - Charakteristik wird als ungerichteter Graph dargestellt
    - Knoten sind Agenten aus Ag
    - Kanten sind gewichtet; $w_{i,j}$ ist das Gewicht der Kante von i zu j
    - Wert einer Koalition: $v(C) = \sum_{\{i,j\} \subseteq C} w_{i,j}$
    - Beispiel:





Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Modulare Darstellung**
  - Induzierte Teilgraphen
    - Berechnung Shapley-Wert: in polynomialer Zeit
    - Berechnung ob Kern leer ist: NP-vollständig
    - Prüfung ob bestimmte Verteilung im Kern: Co-NP-vollständig

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Darstellung von einfachen Spielen**
  - Ja/Nein Wahlspiel: $Y = \langle Ag, W \rangle$
  - Endliche Menge von Agenten: $Ag = \{1, \ldots, n\}$
  - Menge der gewinnenden Koalitionen: $W \subseteq 2^{Ag}$
  - Nichttrivialität: $\emptyset \subset W \subset 2^{Ag}$
  - Monotonie: $C_1 \subseteq C_2 \wedge C_1 \in W \;\Rightarrow\; C_2 \in W$
  - Nullsumme: $C \in W \;\Rightarrow\; Ag \setminus C \notin W$
  - Leere Koalitionen verlieren: $\emptyset \notin W$
  - Große Koalition gewinnt: $Ag \in W$

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Gewichtete Wahlspiele**
  - Jeder Agent i aus Ag bekommt ein Gewicht w_i
  - Eine Koalition C gewinnt, wenn die Summe der Gewichte größer oder gleich einer definierter Gesamtquote q sind:

$$v(C) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sum_{i \in C} w_i \geq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Gewichtetes Wahlspiel mit $1, \ldots, n$ Spielern, den Gewichten $w_1, \ldots, w_n$ und q: $\langle q\,; w_1, \ldots, w_n \rangle$

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Gewichtete Wahlspiele**
  - Keine vollständige Darstellung von einfachen Spielen
  - Berechnung Shapley-Wert: NP-hart
  - Berechnung ob Kern nicht leer ist:
    in polynomialer Zeit
    - $$\sum_{j \in C \setminus \{i\}} w_i < q \;\wedge\; \sum_{j \in C \cup \{i\}} w_j \geq q$$

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Gewichtete Wahlspiele**
  - k-gewichtete Wahlspiele
    - k steht für die Anzahl der einzelnen verbundenen gewichteten Spiele
    - vollständige Darstellung von einfachen Spielen
    - jedes einfache Spiel kann als k-gewichtetes Wahlspiel dargestellt werden
    - Beispiel erweiterte Europäische Union:
      - Ein neues Gesetz braucht die Mehrheit der Länder, die Mehrheit der Bevölkerung in der EU und die Mehrheit der EU Kommissare

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Koalitionsspiele mit Zielen**
  - Qualitative Koalitionsspiele (QCGs)
    - $\Gamma_Q = \langle G, Ag, G_1, \ldots, G_n, V \rangle$
    - Menge von möglichen Zielen: $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$
    - $G_i \subseteq G$ ist eine Menge von Zielen für jeden Agenten $i \in Ag$; jedes Ziel von G_i stellt i zufrieden
    - Charakteristik $V: 2^{Ag} \rightarrow 2^{2^G}$ bestimmt für jede Koalition $C \subseteq Ag$ eine Menge $V(C)$ von Wahlmöglichkeiten
    - Wenn $G' \in V(C)$, dann bewirkt eine der verfügbaren Wahlmöglichkeiten von C alle Ziele in G' gleichzeitig

Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

- **Koalitionsspiele mit Zielen**
  - Qualitative Koalitionsspiele (QCGs)
    - Vollständige Darstellung der Charakteristik auf Basis der Aussagenlogik
    - Aussagenlogische Formel mit Wahrheitswerten für Agenten und Ziele

Fragen ?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!