Computer Algebra

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

5. Polynomiale Gleichungssysteme
5.2 Lösung über Resultanten

Referenzen zum Nacharbeiten:

Köpf 7.5, 7.6
Seminararbeit 8 (Malte Simonsen)

Computer Algebra 5

Resultanten

Definition: Sylvestermatrix

Zu den Polynomen $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und $b(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ wird die Sylvestermatrix folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 \\ 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

Zweck: Aufstellung eines Gleichungssystems mit n+m Variablen und n+m Gleichungen

Definition: Resultante

Zu den Polynomen $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und $b(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ ist die Resultante die Determinante der Sylvestermatrix.

Zweck: Eine gemeinsame Nullstellen der Polynome ergibt eine nichttriviale Lösung. Nichttriviale Lösungen gibt es nur, wenn diese Determinante Null ist. Damit ist das Nullsetzen der Resultante eine notwendige Bedingung für eine gemeinsame Nullstelle.

Computer Algebra 5

Resultanten

Determinanten-Eigenschaften der Resultante

- Bei Beteiligung einer Konstanten c kommt immer c^n heraus.
- Vertauschen der Polynome erhält die Resultante bis auf das Vorzeichen.
- Mit dem Gausschen Eliminationsverfahren kann man die Sylvestermatrix diagonalisieren. Man erhält dann als Resultante das Produkt der Hauptdiagonalen.

Eigenschaften der Resultante für polynomiale Gleichungssysteme

- Für zwei Polynome $a(x_1,x_2,...,x_k)$ und $b(x_1,x_2,...,x_k)$ sei $res(a,b,x_1)$ die Resultante bezüglich der Variablen x_1: Dann ist $res(a,b,x_1)$ ein Polynom in den Variablen $x_2,...,x_k$.
- Die Nullstellenmenge von $a(x_1,x_2,...,x_k)$ und $b(x_1,x_2,...,x_k)$ ist dieselbe wie die Nullstellenmenge von $a(x_1,x_2,...,x_k)$ und $res(a,b,x_1)$.

Computer Algebra 5

Polynomiale Gleichungssysteme

Definition: Was ist in einem solchen Gleichungssystem erlaubt?

Ein polynomiales Gleichungssystem ist ein System aus Polynomen in $K[x_1,x_2,\ldots,x_k]$, also aus Gleichungen, in denen die Variablen $x_1,x_2,\ldots,x_k$ in beliebigen Potenzen auftreten dürfen und die Koeffizienten aus einem Grundkörper K stammen (oder einem Integritätsbereich).
O.B.d.A. handelt es sich um ein homogenes Gleichungssystem.

weil die Potenz 0 auch erlaubt ist.

Definition: Was versteht man unter einer Lösung?

Die Lösung eines polynomialen Gleichungssystems ist die Belegung der Variablen $x_1= \alpha_1$, $x_2= \alpha_2,\ldots,x_k= \alpha_k$ mit algebraischen Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ derart, dass alle Gleichungen durch diese Belegung simultan erfüllt sind.

Anmerkung:

Im allgemeinen Fall können die α_i nur durch die Angabe ihres Minimalpolynoms spezifiziert werden. Es ist nur selten möglich, sie durch Addition, Multiplikation, Inversenbildung und Wurzelziehen aus den Koeffizienten zu erzeugen.

Computer Algebra 5

Polynomiale Gleichungssysteme

Gegeben seien die Polynome $p_1, p_2, \ldots, p_k \in K[x_1, x_2, \ldots, x_k]$.

Lösung über sukzessive Bildung von Resultanten:

1. Bilde $res(p_1, p_i, x_1)$ für alle i=2,...,k und erzeuge somit k-1 Polynome in k-1 Variablen.
2. Wiederhole Schritt 1) mit den erzeugten k-1 Polynomen in k-1 Variablen, bis k=1
3. Löse das zuletzt erzeugte Polynom (k=1) für die k-te Variable explizit durch Faktorisierung.
4. Setze die gefundenen Lösungen für die k-te Variable in das davor erzeugte Gleichungssystem mit 2 Polynomen und 2 Variablen ein (damit ist nur noch eine Variable frei) und errechne die Lösung für die andere Variable durch Faktorisierung eines der Polynome nach Schritt 3)
=> Lösungen für (k-1)-te Variable gefunden.
5. Fahre fort mit Schritt 4), bis alle Variablen mit Lösungen belegt sind.
6. Teste dann die vollständige Lösung am Original-Gleichungssystem. Falls die Lösung nicht überall 0 ergibt, ist sie nicht zulässig. In diesem Fall muss mit einer anderen Kombination von Lösungen für die einzelnen Variablen gearbeitet werden.

Anm.: Die Nichtlösbarkeit ist erst dann eindeutig bewiesen, wenn von den in Schritt 1 berechneten Resultanten für jedes k mindestens eine vollständig faktorisiert wurde und keine Kombination von Lösungen möglich war.