# *Grundlagen der Theoretischen Informatik*

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

## Kap. 2: Logik, Teil 2.2: Prädikatenlogik

# Grenzen der Aussagenlogik

**Gegeben**

- Alle, die die Vorlesung besuchen, bestehen die Klausur (A)
- Susi besucht die Vorlesung (B1)
- Bernd besucht die Vorlesung (B2)
- Linda besucht nicht die Vorlesung (B3)
- Alex hat die Klausur nicht bestanden (B4)

**Gewünschte Folgerungen:**

- Susi besteht die Klausur (C1)
- Bernd besteht die Klausur (C2)
- Linda ? Alex ?

**Aussagenlogische Formeln:**

- $A \wedge B1 \rightarrow C1$
- $A \wedge B2 \rightarrow C2$
- ...

**Gewünschte Formel:**

- besuchtVorlesung (x) → bestehtKlausur (x)

**In der Aussagenlogik:**

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**

# Grenzen der Aussagenlogik

**Gegeben**

- Die Klausurnote eines Studenten, der alle Übungen gelöst hat, ist 1 oder 2 (A)
- Susi hat alle Übungen gelöst (B1)
- Bernd hat alle Übungen gelöst (B2)
- Linda hat nicht alle Übungen gelöst (B3)
- Alex hat eine 5 in der Klausur (B4)

**Gewünschte Formel:**

- hatAlleÜbungenGelöst (x) → (Klausurnote (x) ≤ 2)

**In der Aussagenlogik:**

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**

# Grenzen der Aussagenlogik

**Gegeben**

- Eine Vorlesung, die nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird, ist langweilig (A)
- Susi ist eine Studentin (B1)
- Bernd ist ein Student (B2)
- Susi besucht GTI (B3)
- Bernd besucht GTI (B4)
- GTI ist nicht langweilig (B5)

**Gewünschte Formel:**

- ( (besuchtVorlesung (v, s) → weiblich (s)) → langweilig (v) )
  ∧ ( (besuchtVorlesung (v, s) → ¬weiblich (s)) → langweilig (v) )

- Das ist nur eine sehr indirekte Beschreibung von (A) !
- Wie drückt man (A) direkt aus?
- Wie drückt man aus, dass es für jede Vorlesung überhaupt Studenten oder Studentinnen gibt, die sie besuchen ?

**In der Aussagenlogik:**

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**
- **keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“**

# Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik

**In der Aussagenlogik:**

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen
- keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“

**In der Prädikatenlogik:**

- Variable
- Prädikate
- Funktionen
- Quantoren

# Prädikatenlogik

- **Variable**

  **In eine Variable dürfen beliebige Elemente eingesetzt werden.**

  **Könnten nicht die Literale in der Aussagenlogik als Variable aufgefasst werden ?**

  ***Was ist bei Literalen in der Aussagenlogik anders ?***

- **Prädikate**

  **Ein Prädikat ist eine Aussage, die von anderen Werten abhängt.**

  **Die Anzahl der Werte, von denen ein Prädikat abhängt, ist für jedes Prädikat eine beliebige, aber feste Zahl.**

  **Ein Prädikat, das von k Werten abhängt, heißt k-stellig.**
  **Kurzform:** $P(x_1, x_2, ..., x_k)$

# Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Prädikaten:**

1. Zwei Personen sind miteinander verheiratet

2. Eine Person liebt eine andere

3. Eine Person hasst eine andere

4. Eine Person besucht die Vorlesung GTI

5. Eine Person besucht eine beliebige Vorlesung

6. Ein Ort liegt zwischen zwei anderen

# Prädikatenlogik

- **Funktionen**

**Eine Funktion ist eine Zuordnung, die einer Menge von Werten einen neuen Wert eindeutig zuordnet.**
**Kurzform:** $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$

**Eine Funktion, die von k Werten abhängt, heißt k-stellig.**

**Bsp.: Drücke folgenden Sachverhalt mit prädikatenlogischen Hilfsmitteln aus:**

$(2 < x < 4) \land (0 < y < 6) \land (x + y > 7) \land (x \cdot y < 10)$

# Prädikatenlogik

- **Quantoren**

  - **für Aussageformen, die nur von x abhängen:**

    **Der Existenzquantor ∃`x (...)` beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für `x` gibt, der die dahinter stehende Aussageform in `x` zu einer wahren Aussage macht.**

    **Der Allquantor ∀`x (...)` beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für `x` die dahinter stehende Aussageform in `x` zu einer wahren Aussage macht.**

    Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

    Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*, für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

  - **für Aussageformen, die von weiteren Variablen abhängen:**

    **Existenzquantor ∃`x (...)` und Allquantor ∀`x (...)` beschreiben Aussage*formen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über x die Aussage bereits gemacht ist.**

# Prädikatenlogische Formeln

- **Eine prädikatenlogische Formel 1. Stufe ist eine Verknüpfung von endlich vielen Variablen, Funktionen und Prädikaten mit aussagenlogischen Operatoren oder Quantoren, die sich nur auf Variable beziehen.**

**Bsp.:** $\forall x \, ( R(y, z) \wedge \exists y \, (\neg P(y, x) \vee R(y, z)) )$

**Grüne** Vorkommen von $y$ und $z$ sind **frei**.
**Rote** Vorkommen von $x, y$ und $z$ sind **gebunden**.

# Prädikatenlogische Formeln

- **Eine Belegung einer Formel ist eine Zuweisung von *Werten aus festgelegten Definitionsbereichen an die freien Variablen* derart, dass dieselben Variablen immer denselben Wert erhalten.**
- **Eine Formel heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel wahr ist.**

☹

  - Das Erfüllbarkeitsproblem ist in der Prädikatenlogik nicht entscheidbar, d.h. kein Algorithmus kann jemals in der Lage sein, von jeder Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

***Das prädikatenlogische Erfüllbarkeitsproblem ist unlösbar !***

**Das Wort Belegung kann noch allgemeiner aufgefasst werden:**

- **Eine Belegung einer Formel mit abstrakten Prädikats-, Funktions- und Variablensymbolen ist eine Zuweisung von konkreten Prädikaten, Funktionen und Werten an die Variablen, die mit den Definitionen übereinstimmt.**

***„Interpretation“, „Modell“***

# Prädikatenlogik

## Beschreibung der semantischen Eigenschaft einer Formel $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mit prädikatenlogischen Mitteln:

- **F ist erfüllbar:**

$$\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widersprüchlich:**

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow \bot)$$

- **F ist gültig (Tautologie):**

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widerlegbar:**

$$\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow \bot)$$

***Was fällt auf ?***

# Prädikatenlogik

## „Rechenregeln“ für die Quantoren:

$\neg\forall x\ (F(x)) \Leftrightarrow \exists x\ (\neg F(x))$

$\neg\exists x\ (F(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (\neg F(x))$

*Verallgemeinerung von deMorgan*

$\forall x\ \forall y\ (F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ (F(x,y))$

$\exists x\ \exists y\ (F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ (F(x,y))$

*Vertauschung gleicher Quantoren*

**Was gilt bei der Vertauschung verschiedener Quantoren ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)**

$\exists x\ \forall y\ (F(x,y))$ $\forall y\ \exists x\ (F(x,y))$

$\exists y\ \forall x\ (F(x,y))$ $\forall x\ \exists y\ (F(x,y))$

# Prädikatenlogik

## „Rechenregeln“ für die Quantoren:

**Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in $\wedge$ oder $\vee$ ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)**

| | |
|---|---|
| $\forall x\,(F(x)) \vee \forall x\,(G(x))$ | $\forall x\,(F(x) \vee G(x))$ |
| $\forall x\,(F(x)) \wedge \forall x\,(G(x))$ | $\forall x\,(F(x) \wedge G(x))$ |
| $\exists x\,(F(x)) \vee \exists x\,(G(x))$ | $\exists x\,(F(x) \vee G(x))$ |
| $\exists x\,(F(x)) \wedge \exists x\,(G(x))$ | $\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$ |

# Prädikatenlogik

## Arithmetische Vergleichsprädikate:

| Präfix-Notation (Standard in Prädikatenlogik) | Infix-Notation (Standard in Arithmetik) | Postfix-Notation (Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern) |
|---|---|---|
| `lessThan (x,y)` | `x < y` | `x, y, <` |
| `equal (x,y)` | `x = y` | `x, y, =` |

**Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:**

$x \leq y$

$x \geq y$

$x \neq y$

$x > y$

***Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?***

# Prädikatenlogik

## Arithmetische Vergleichsprädikate:

**Bilde das Gegenteil von:**

**1)** $(x>0) \vee ((y+x) \leq 0)$

**2)** $\forall y<0\ ((x>0) \vee ((y+x) \leq 0))$

# Prädikatenlogik

**Was bedeuten eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren ?**

$\forall\ y{\in}D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\forall\ y\ (y{\in}D \rightarrow P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y\ (y{\notin}D \lor P(y))$

$\exists\ y{\in}D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\exists\ y\ (y{\in}D \land P(y))$

**Daher gilt für die Negation:**

$\neg(\forall\ y{\in}D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\forall\ y\ (y{\notin}D \lor P(y))) \Leftrightarrow \exists\ y\ (y{\in}D \land \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \exists\ y{\in}D\ (\neg P(y))$

$\neg(\exists\ y{\in}D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\exists\ y\ (y{\in}D \land P(y))) \Leftrightarrow \forall\ y\ (y{\notin}D \lor \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y{\in}D\ (\neg P(y))$

➔ **Eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren werden bei Negationen nicht ebenfalls negiert !**

# Prädikatenlogik

## Anwendung auf Aufgabe von vorhin:

**Bilde das Gegenteil von:** $\forall y{<}0\ ((x>0)\ \lor\ ((y+x)\leq 0))$

**Lösung:**

$\forall y{<}0\ ((x>0)\ \lor\ ((y+x)\leq 0))$

ist Kurzschreibweise von: $\forall y\ (\neg(y<0)\ \lor\ ((x>0)\lor((y+x)\leq 0)))$

„Gegenteil“ soll heißen: Negation der oben angegebenen Formel

$$\neg\,\forall y\ (\neg(y<0)\ \lor\ ((x>0)\lor((y+x)\leq 0)))$$

$$\Leftrightarrow \exists y\ ((y<0)\ \land\ (x\leq 0)\land((y+x)>0)))$$

$$\Leftrightarrow \exists y{<}0\ ((x\leq 0)\ \land\ ((y+x)>0)))$$

$\Leftrightarrow \perp$ **für alle x**

**Also ist die Negation ein Widerspruch**

**Was folgt dann für die ursprüngliche Formel ?**

# Prädikatenlogik

## Achtung: Unterscheide, wo die Negation steht:

**Aussagen für negierte Formeln:** $(\mathbf{F(x)} \leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{F(x)} \leftrightarrow \bot)$

(gilt für *beliebige* x)

**Damit gilt:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Damit gilt:** | $\mathbf{F(x)}$ ist Tautologie | $\Leftrightarrow$ | $\neg\mathbf{F(x)}$ ist Widerspruch |
| | $\mathbf{F(x)}$ ist erfüllbar | $\Leftrightarrow$ | $\neg\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar |

Also ist die Formel $\mathbf{F(x)} \Leftrightarrow \forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$ eine Tautologie,
da $\neg\mathbf{F(x)} \Leftrightarrow \neg(\forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)))$ ein Widerspruch ist.

**Negierte Aussagen für dieselbe Formel $\mathbf{F(x)}$:**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{F(x)}$ ist Tautologie | $\Leftrightarrow$ | $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widerlegbar |
| $\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar | $\Leftrightarrow$ | $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** Tautologie |
| $\mathbf{F(x)}$ ist erfüllbar | $\Leftrightarrow$ | $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widersprüchlich |
| $\mathbf{F(x)}$ ist widersprüchlich | $\Leftrightarrow$ | $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** erfüllbar |

**Unterscheide:** $\mathbf{F(x)}$ ist **nicht** widerlegbar $\neq$ $\neg\mathbf{F(x)}$ ist widerlegbar