Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kapitel 2: Mengenlehre

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 3
Meinel 2, 4, 5, 10.2-10.4
(zur Vertiefung: Meinel 10.5-10.8 und Beutelspacher 10)
Dean 2, 5-7
Hachenberger 1 (teilweise), 3, 5.8

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Definition

Eine Menge ist eine <u>ungeordnete</u> Ansammlung von <u>beliebigen</u> Objekten.
Die Objekte, die in einer Menge enthalten sind, heißen <u>Elemente</u> der Menge.
Schreibweise: $\underline{x \in M}$ bedeutet: Das Element x ist in Menge M.

Eigenschaften

- Reihenfolge, Einmaligkeit, Anzahl von Elementen

  Die Reihenfolge ist nicht festgelegt: Umordnen erzeugt keine neue Menge.
  Ein Element kann nur einmal in M enthalten sein, egal, wie häufig es erwähnt wird.
  Eine Menge M kann beliebig viele Elemente enthalten, also auch unendlich viele.

- Gleichheit von Mengen

  Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn jedes Element aus A auch in B enthalten ist und jedes Element aus B auch in A enthalten ist.

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Darstellung von Mengen

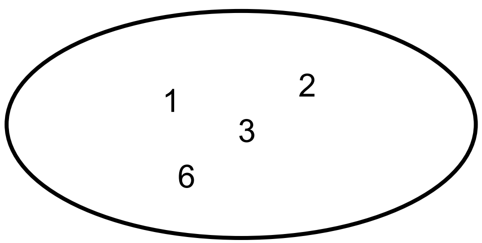
- Elementschreibweise

für endliche Mengen: $\{e_1, e_2, \underbrace{\ldots}_{\text{Elemente müssen konkret hingeschrieben werden}}, e_n\}$

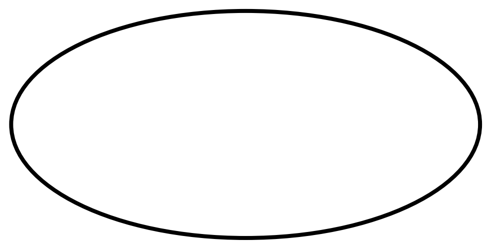
für beliebige (also auch unendliche) Mengen: $\{x \in \text{Grundmenge: Prädikat } (x)\}$

- Venn-Diagramme

für endliche Mengen:



für beliebige Mengen (abstrakt):



2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → Menge

- Vereinigung $A \cup B$

  Element muss in A <u>oder</u> in B liegen.

- Durchschnitt $A \cap B$

  Element muss in A <u>und</u> in B liegen.

- Differenz $A \setminus B$

  Element muss in A <u>und nicht</u> in B liegen.

- Symmetrische Differenz $A \Delta B$

  Element muss in A <u>oder</u> in B liegen, aber <u>nicht in beiden gleichzeitig</u>.

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → {w,f}

- Teilmenge / Obermenge

$A \subset B$ *A ist Teilmenge und B ist Obermenge:*
Alle Elemente von A liegen auch in B.

$A \subseteq B$ *A ist Teilmenge und B ist Obermenge:*
Alle Elemente von A liegen auch in B. A und B können auch gleich sein.

$A \subsetneq B$ *A ist echte Teilmenge und B ist echte Obermenge:*
Alle Elemente von A liegen auch in B. A und B sind nicht gleich, d.h. es gibt mindestens ein Element, das in B liegt und nicht in A.

- Unterschied zwischen Elementbeziehung und Teilmengenbeziehung

Ein <u>beliebiges Objekt</u> x ist Element einer Menge M,
wenn es in der anderen Menge enthalten ist ($x \in M$).
Eine <u>Menge A</u> ist Teilmenge einer Menge B,
wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind ($A \subset B$)

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge → Menge

- Bildung der Potenzmenge

Die Potenzmenge $\wp(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A.

- Bildung der komplementären Menge

Die zu einer Menge A komplementäre Menge $\bar{A}$ ist die Menge, die aus allen Elementen besteht, die nicht in A enthalten sind.

Dazu muss man das Universum Ω aller möglichen Elemente definieren: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → Menge

- Kreuzprodukt (karthesisches Produkt)

  M x M ist die Menge aller Paare von Elementen aus M: $M \times M = \{(a,b) : a,b \in M\}$

- Tupel

  Ein Tupel ist die Verallgemeinerung eines Paares:
  Ein n-Tupel hat die Form $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Es ist Element von $M \times \underbrace{\ldots}_{\text{n mal}} \times M$
  Ein Paar ist also ein 2-Tupel.

- Unterschiede zwischen Tupeln und Mengen

  Bei den Elementen eines Tupels kommt es auf die Reihenfolge an,
  bei denen einer Menge nicht.

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Definition und Eigenschaften

Eine Relation auf M ist eine beliebige Teilmenge des Kreuzprodukts M x M.

Mögliche Eigenschaften einer Relation R ⊂ M x M (gelten nicht immer!):

- reflexiv: $\forall x \in M : (x, x) \in R$
- symmetrisch: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$
- transitiv: $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
- antisymmetrisch: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- linear (vollständig): $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation auf M ist eine Relation R mit folgenden Eigenschaften:

Schreibweise: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \cong y$ (x ist äquivalent zu y)

- reflexiv: $\forall x \in M : x \cong x$
- symmetrisch: $\forall x, y \in M : x \cong y \Leftrightarrow y \cong x$
- transitiv: $\forall x, y, z \in M : x \cong y \wedge y \cong z \Rightarrow x \cong z$

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzklasse** zu einer Äquivalenzrelation $R \subset M \times M$ ist eine Menge von Elementen aus M, die paarweise zueinander äquivalent sind.

1) *Jedes Element liegt in einer Äquivalenzklasse (wg. Reflexivität)*
2) *Kein Element liegt in mehr als einer Äquivalenzklasse (wg.Transitivität)*
3) *Die Tatsache, dass die Äquivalenzklasse eine Menge ist, beruht auf der Symmetrie*

Eine **Partition** einer Menge M ist eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen.

1. Zu jeder Partition gehört eindeutig eine Äquivalenzrelation.

   Definiere zwei Elemente genau dann als äquivalent, wenn sie in derselben Partition liegen.

2. Zu jeder Äquivalenzrelation gehört eindeutig eine Partition.

   Die Menge der Äquivalenzklassen bildet die Partition.

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Äquivalenzrelationen

Vorgehensweise für konkrete Aufgaben:

- Definition und Nachweis der Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

  1) Prüfe für jedes Element nach, ob Reflexivität gilt.
  2) Prüfe für je zwei Elemente nach, ob Symmetrie gilt.
  3) Prüfe für je drei Elemente nach, ob Transitivität gilt.

- Bestimmen von Äquivalenzklassen:

  1) Fange mit beliebigem Element an und nimm alle Elemente hinzu, zu dem das Element in Relation steht. $\Rightarrow$ *1. Äquivalenzklasse*

  2) Fahre mit noch nicht erfassten Element fort und nimm alle Elemente hinzu, zu dem dieses in Relation steht. $\Rightarrow$ *2. Äquivalenzklasse*

  $\vdots$

  n) Wenn kein Element mehr übrig ist, sind alle Äquivalenzklassen gebildet.

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Ordnungsrelationen

Eine Ordnungsrelation auf M ist eine Relation R mit folgenden Eigenschaften:

Schreibweise: $(x,y) \in R \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$ (x ist kleiner gleich y)

- reflexiv: $\forall\, x \in M: x \preccurlyeq x$
- antisymmetrisch: $\forall\, x,y \in M: (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = y)$
- transitiv: $\forall\, x,y,z \in M: (x \preccurlyeq y) \wedge (y \preccurlyeq z) \Rightarrow (x \preccurlyeq z)$
- linear: $\forall\, x,y \in M: (x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x)$

Ordnungsrelationen werden auch *totale* Ordnungen genannt.

Bei Wegfall der Eigenschaft *linear* spricht man von *Halbordnungen* oder *partiellen Ordnungen*.

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Ordnungsrelationen

- Maximum und Minimum bezüglich einer Ordnung:

  $x \in M$ ist Maximum $\Leftrightarrow \quad \forall y \in M: (y \preccurlyeq x)$

  $x \in M$ ist Minimum $\Leftrightarrow \quad \forall y \in M: (x \preccurlyeq y)$

  Bei Wegfall der Eigenschaft $x \in M$ spricht man von Supremum statt Maximum (Infimum statt Minimum),
  wenn es kein weiteres Element mit dieser Eigenschaft gibt, das kleiner (größer) ist.

- maximale und minimale Elemente:

  $x \in M$ ist maximal $\Leftrightarrow \quad \forall y \in M: (x \preccurlyeq y) \Rightarrow (x = y)$

  $x \in M$ ist minimal $\Leftrightarrow \quad \forall y \in M: (y \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = y)$

  Jedes Maximum ist maximal und jedes Minimum ist minimal, aber nicht immer umgekehrt!

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Darstellung von Relationen R auf endlichen Mengen M

- Zuordnungsdiagramm (für beliebige Relationen)

  Zeichne 2 Venn-Diagramme für M, eins links, eins rechts:
  Verbinde Element x in linkem Diagramm mit Element y im rechten Diagramm
  genau dann, wenn $(x,y) \in R$

- Partition (nur für Äquivalenzrelationen)

  Bilde die Äquivalenzklassen nach der Methode auf Folie 11

- Hasse-Diagramm (nur für Ordnungsrelationen)

  Zeichne die Elemente von M von oben nach unten, maximale oben, minimale unten:
  Verbinde ein höheres Element x mit einem tieferen y, wenn
  1) $y \preccurlyeq x$ (y ist kleiner gleich x)
  2) $(y \preccurlyeq z) \wedge (z \preccurlyeq x) \Rightarrow (y=z) \vee (z=x)$ (kein z liegt zwischen y und x)

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Verallgemeinerung des Kreuzprodukts für <u>verschiedene</u> Mengen:

Menge x Menge → Menge

- Kreuzprodukt (karthesisches Produkt)

  M x N ist die Menge aller Paare von Elementen,
  wobei das erste aus M und das zweite aus N ist: $M \times N = \{(a,b): a \in M, b \in N\}$

Analog:

- Kreuzprodukt für mehr als 2 verschiedene Mengen
- Verallgemeinerung des Tupelbegriffs für verschiedene Mengen

Verallgemeinerung des Relationsbegriffs für <u>verschiedene</u> Mengen:

Eine Relation zwischen M und N ist eine beliebige Teilmenge des Kreuzprodukts M x N.

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Eine **Funktion** ist eine Relation $F \subset M \times N$ (M und N dürfen ungleich sein), in der für **jedes** $m \in M$ ein **eindeutiges** Paar (m,n) existiert:

- Existenz des Funktionswerts (Linksvollständigkeit): $\forall m \in M\ \exists n \in N: (m,n) \in F$
- Eindeutigkeit des Funktionswerts (Rechtseindeutigkeit):
  $\forall m \in M: (m,n_1) \in F \wedge (m,n_2) \in F \Rightarrow n_1 = n_2$

Wenn $(m,n) \in F$, dann heißt $n \in N$ der <u>Funktionswert F(m)</u> von $m \in N$.
M wird <u>Definitionsbereich</u> und N <u>Zielmenge</u> der Funktion F genannt.

<u>Abbildungsschreibweise für Funktionen:</u> für die einzelnen Elemente:

F:	M	$\rightarrow$	N	m	$\mapsto$	F(m)
	Definitionsbereich		Zielmenge	Urbild (Argument)		Bild

Die Teilmenge von N, für die es Urbilder in M gibt, heißt <u>Bildmenge</u> F(M) von M.

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

<u>Komposition von Funktionen:</u>

Seien $F: A \to B$ und $G: B \to C$ Funktionen.
Dann ist $G \circ F: A \to C$ die Kompositionsfunktion:

$$G \circ F = \{(a,c) \in AxC \mid \exists b \in B: b=F(a) \wedge c = G(b)\}$$

Für alle $a \in A$ gilt: $G \circ F\ (a) = G(F(a))$

Analog kann man die <u>Komposition von Relationen</u> definieren.

<u>Satz:</u> Die Komposition von 2 Funktionen ist <u>immer</u> eine Funktion.

<u>Inverse Relationen: R^{-1}</u>

Sei $R \subset A \times B$ eine Relation.
Dann ist $R^{-1} \subset B \times A$ mit $(a,b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R$ die zu R inverse Relation.

<u>Frage:</u> Wann ist die Inverse einer Funktion wieder eine Funktion ?

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Funktionen mit speziellen Eigenschaften

- surjektive Funktionen:

  Eine Funktion F: M→N heißt surjektiv,
  wenn F(M) = N gilt (Rechtsvollständigkeit).

- injektive Funktionen:

  Eine Funktion F: M→N heißt injektiv,
  wenn jedes Bild nur ein Urbild hat (Linkseindeutigkeit).

- bijektive Funktionen

  Eine Funktion F: M→N heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Satz: Die Inverse F^{-1} einer Funktion F ist genau dann wieder eine Funktion, wenn F bijektiv ist.

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Mächtigkeit von Mengen

Zwei endliche Mengen gelten als „gleich groß“,
wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

Anzahl der Elemente von M: #M

Zwei unendliche Mengen gelten als „gleich groß“,
wenn es zwischen ihnen eine bijektive Funktion gibt.

Mächtigkeit von M: |M|

- Diese Definition verallgemeinert die für endliche Mengen:
  Sie ist also auch auf endliche Mengen anwendbar:

  Seien $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
  Dann ist $f(a_i) = b_i$ für alle i die gewünschte bijektive Funktion.

  Anm.: Da Mengen ungeordnet sind, ist die bijektive Funktion nicht eindeutig!

  Falls $\#A > \#B$: Jede Funktion $f: A \to B$ ist nicht injektiv.
  Falls $\#A < \#B$: Jede Funktion $f: A \to B$ ist nicht surjektiv.

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Mächtigkeit von Mengen

Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*,
wenn es eine bijektive Funktion f: $\mathbb{N} \to$ M gibt

- Cantorsches Diagonalverfahren für mehrdimensionale abzählbar unendliche Mengen:

Bsp. für $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) \quad \dots \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & \dots \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Folgerung:

- $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar !

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Konzept 1: Aussagenlogische Formeln und ihre Operationen:

Aussagenlogische Formeln
haben die Operatoren $\neg$ (einstellig) und $\wedge$ und $\vee$ (jeweils zweistellig)
und die Konstanten $\perp$ und $\top$, die folgenden Regeln genügen:

$$p \wedge q = q \wedge p$$
$$p \vee q = q \vee p$$

Kommutativgesetze

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

Assoziativgesetze

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Distributivgesetze

$$p \wedge p = p$$
$$p \vee p = p$$

Idempotenz

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

deMorgansche Regeln

$$\neg\neg p = p$$

Doppelte Negation (Involution)

$$p \vee \perp = p$$
$$p \wedge \top = p$$

Neutrale Elemente

$$p \wedge \perp = \perp$$
$$p \vee \top = \top$$

“Nullmultiplikation”

$$p \wedge \neg p = \perp$$
$$p \vee \neg p = \top$$

Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Konzept 2: Mengen eines Ereignisraums Ω und ihre Operationen:

Mengen eines Ereignisraums Ω
haben die Operatoren $\overline{}$ (einstellig) und ∩ und ∪ (jeweils zweistellig)
und die Konstanten ∅ und Ω, die folgenden Regeln genügen:

$$p \cap q = q \cap p$$
$$p \cup q = q \cup p$$

Kommutativgesetze

$$p \cap (q \cap r) = (p \cap q) \cap r$$
$$p \cup (q \cup r) = (p \cup q) \cup r$$

Assoziativgesetze

$$p \cap (q \cup r) = (p \cap q) \cup (p \cap r)$$
$$p \cup (q \cap r) = (p \cup q) \cap (p \cup r)$$

Distributivgesetze

$$p \cap p = p$$
$$p \cup p = p$$

Idempotenz

$$\overline{(p \cap q)} = \overline{p} \cup \overline{q}$$
$$\overline{(p \cup q)} = \overline{p} \cap \overline{q}$$

deMorgansche Regeln

$$\overline{\overline{p}} = p$$

Doppelte Negation (Involution)

$$p \cup \varnothing = p$$
$$p \cap \Omega = p$$

Neutrale Elemente

$$p \cap \varnothing = \varnothing$$
$$p \cup \Omega = \Omega$$

“Nullmultiplikation”

$$p \cap \overline{p} = \varnothing$$
$$p \cup \overline{p} = \Omega$$

Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Formale Zusammenfassung dieser beiden Konzepte:

Eine **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathscr{B}$ aus Elementen mit den Operatoren ~ (einstellig) und $\oplus$ und $\odot$ (jeweils zweistellig) und den Konstanten 0 und 1, die folgenden Regeln genügen:

$$p \odot q = q \odot p$$
$$p \oplus q = q \oplus p$$

Kommutativgesetze

$$p \odot (q \odot r) = (p \odot q) \odot r$$
$$p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$$

Assoziativgesetze

$$p \odot (q \oplus r) = (p \odot q) \oplus (p \odot r)$$
$$p \oplus (q \odot r) = (p \oplus q) \odot (p \oplus r)$$

Distributivgesetze

$$p \odot p = p$$
$$p \oplus p = p$$

Idempotenz

$$\sim(p \odot q) = \sim p \oplus \sim q$$
$$\sim(p \oplus q) = \sim p \odot \sim q$$

deMorgansche Regeln

$$\sim\sim p = p$$

Doppelte Negation (Involution)

$$p \oplus 0 = p$$
$$p \odot 1 = p$$

Neutrale Elemente

$$p \odot 0 = 0$$
$$p \oplus 1 = 1$$

“Nullmultiplikation”

$$p \odot \sim p = 0$$
$$p \oplus \sim p = 1$$

Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Was bringt uns der Formalismus ?

Sehr viel: Boolesche Algebren fassen mehrere Konzepte zusammen, die wir bereits kennen !

➔ Einmal verstanden, mehrmals angewendet

➔ Sachverhalte, die aus den Eigenschaften einer Booleschen Algebra folgen, gelten für alle Mengen, die zum Konzept der Booleschen Algebra gehören.

Beispiele für solche Sachverhalte:

Normalformen (KNF, DNF)

Ordnungsrelationen

Auswertungsalgorithmen

Komplexitätsanalysen

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren für Faule

Der Nachweis folgender Eigenschaften einer Booleschen Algebra reicht aus:

Eine **Boolesche Algebra** ist bereits durch eine Menge $\mathscr{B}$ aus Elementen mit den Operatoren ~ (einstellig) und $\oplus$ und $\odot$ (jeweils zweistellig) und den Konstanten 0 und 1 gegeben, die folgenden Regeln genügen:

$$\mathbf{p \odot q = q \odot p}$$
$$\mathbf{p \oplus q = q \oplus p}$$

Kommutativgesetze

$$\mathbf{p \odot (q \oplus r) = (p \odot q) \oplus (p \odot r)}$$
$$\mathbf{p \oplus (q \odot r) = (p \oplus q) \odot (p \oplus r)}$$

Distributivgesetze

$$\mathbf{p \oplus 0 = p}$$
$$\mathbf{p \odot 1 = p}$$

Neutrale Elemente

$$\mathbf{p \odot {\sim}p = 0}$$
$$\mathbf{p \oplus {\sim}p = 1}$$

Inverses Element (Komplement)

Das heißt:
Bei Erfüllung dieser 4 Grundgesetze sind die anderen Gesetze *Assoziativgesetze*, *deMorgansche Regeln*, *Idempotenz*, *Nullmultiplikation* und *doppelte Negation* automatisch erfüllt.

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren: Weitere Beispiele

1. Schaltfunktionen-Algebra

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}\}$

$\sim f(x_1,\ldots,x_n) = 1 - f(x_1,\ldots,x_n)$

$(f \oplus g)(x_1,\ldots,x_n) = \max \{f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)\}$

$(f \odot g)(x_1,\ldots,x_n) = \min \{f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)\}$

Nullelement, Einselement ?

2. Teiler-Algebra

$\mathscr{B} = \{m \in \mathbb{N}$: m teilt n$\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$,

für das die Primzahlzerlegung keine mehrfachen Primfaktoren enthält

$\sim p = n / p$

$p \oplus q = \text{ggt}(p,q)$

$p \odot q = \text{kgv}(p,q)$

Nullelement, Einselement ?