Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kapitel 1: Grundlagen der Mathematik

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 1, 2.1
Meinel 1
Dean 3, 4
Hachenberger 1.4 (teilweise)

Inhaltlicher Umfang dieser Vorlesung

Inhaltliche Voraussetzungen:

Logisches Denken, Mathematik bis 9. Klasse (Gymnasium)

Lernziele dieser Vorlesung:

Verständnis für Mathematik und Freude daran

Elementare Konzepte: Logik, Mengenlehre, Zahlen

Fortgeschrittene Konzepte: Beweisstrategien, Zahlentheorie, Algebra

Spezielle Gebiete der Diskreten Mathematik: Kombinatorik, Graphentheorie

Direkte inhaltliche Relevanz für folgende Vorlesungen:

Informationstechnik, Digitaltechnik, Programmieren, Algorithmen und Datenstrukturen in C,
Analysis, Lineare Algebra, Grundlagen der Theoretischen Informatik

Literatur

Lehrbücher, nach denen diese Vorlesung vorgeht:

Albrecht **Beutelspacher** / Marc-Alexander Zschiegner:
Diskrete Mathematik für Einsteiger,
Vieweg 2004 (2. Auflage), ISBN 3-528-16989-3

Rainer **Lang**: *Vorlesungsskript für die Vorlesung Diskrete Mathematik*,
FH Wedel 2005

Christoph **Meinel** / Martin Mundhenk:
Mathematische Grundlagen der Informatik,
Teubner 2002 (2. Auflage), ISBN 3-519-12949-3

Literatur

Weitere empfehlenswerte Lehrbücher:

Martin Aigner: Diskrete Mathematik,
Vieweg 2001 (4. Auflage), ISBN 3-528-37268-0

Norman Biggs: Discrete Mathematics,
Oxford University Press 2002, ISBN 0-19-850717-8

Neville Dean: *Diskrete Mathematik,*
Pearson Studium, Reihe "im Klartext" 2003, ISBN 3-8273-7069-8

Dirk Hachenberger: Mathematik für Informatiker,
Pearson Studium 2005, ISBN 3-8273-7109-0

Jiri Matousek / Jaroslav Nesetril:
Diskrete Mathematik - Eine Entdeckungsreise,
Springer-Verlag 2001, ISBN 3-540-42386-9

1. Grundlagen der Mathematik

1.1 Einführung

Was ist das Wesentliche der Mathematik ?

Mathematik ist in erster Linie das Erkennen von:

- Strukturen
- Zusammenhängen
- Verallgemeinerungen
- Gemeinsamkeiten

Erst aus diesen Prinzipien folgert man:

- Rechenregeln
- Vorgehensweisen (Algorithmen)

Formalismen dienen in der Mathematik zu

- einer eindeutigen Ausdrucksweise
- einem besseren Verständnis für den Menschen

1. Grundlagen der Mathematik

1.1 Einführung

Was ist Diskrete Mathematik ?

- Logik
- Mengenlehre
- Diskrete Zahlenbereiche
- Kombinatorik
- Graphentheorie
- Algebra

Was gehört nicht zur Diskreten Mathematik ?

- Analysis / Funktionentheorie
- Lineare Algebra
- Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik
- ...

1.2 Aussagenlogik

Aussagen und Wahrheitswerte

Was ist eine Aussage ?

- Eine *elementare* Aussage ist ein beliebiges Objekt.
- Elementare Aussagen sind unteilbar.
  - Wegen der Unteilbarkeit heißen elementare Aussagen auch *Atome*

Was ist ein Wahrheitswert ?

- Ein Wahrheitswert ist ein Element aus einer zweielementigen Menge (z.B. dargestellt als {`w`, `f`} oder {0,1}).

Was macht die Aussagenlogik ?

- Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit Funktionen, die jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.
  - Solche Funktionen heißen *binäre Funktionen*

1.2 Aussagenlogik

Operatoren zwischen Aussagen

Durch Operatoren werden aus alten Aussagen neue Aussagen geschaffen:

Einstelliger Operator:

- **Negation (¬)**

Zweistellige Operatoren:

- **Konjunktion (∧)**
- **Disjunktion (∨)**
- **Implikation (→)**
- **Äquivalenz (↔)**

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

1.2 Aussagenlogik

Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Äquivalenzregeln:

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Kontraposition

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Ersetzen der Implikation durch ¬ und ∨

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Ersetzen der Äquivalenz durch Implikationen

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

deMorgansche Regeln

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

Doppelte Negation

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Kommutativgesetze

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Distributivgesetze

1.2 Aussagenlogik

Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Schlussregeln:

$(p \rightarrow q) \land p \Rightarrow q$

Modus ponens

$(p \rightarrow q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$

Modus tollens

$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Kettenschluss

$(\neg p \rightarrow q) \land (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p$

Indirekter Beweis

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \land q$	$p \lor q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$p \land q \Rightarrow p$ $\quad$ $p \land q \Rightarrow q$

Logische Einschränkung

$(p \lor q) \land \neg q \Rightarrow p$

Logischer Ausschluss

1.3 Prädikatenlogik

Aussageformen, Variable und Prädikate

Was ist eine Aussageform ?

- Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit Variablen aus bestimmten Definitionsbereichen.
- Die Belegung jeder Variable mit einem zulässigen Wert macht aus einer Aussageform eine Aussage

Was ist ein Prädikat ?

- Ein Prädikat gehört zu einer Aussageform und beschreibt die Eigenschaft einer Wertekonstellation, eine Aussageform zu einer wahren Aussage zu machen.
- Für jede Wertekonstellation von Werten aus dem Definitionsbereich der Variablen ist das zu der jeweiligen Aussageform gehörende Prädikat definiert.
- Ein Prädikat kann wahr (erfüllt) oder falsch (nicht erfüllt) sein.

1.3 Prädikatenlogik

Quantoren

- **für Aussageformen, die nur von x abhängen:**

Der Existenzquantor $\exists x \; (\ldots)$ beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für x gibt, der die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

Der Allquantor $\forall x \; (\ldots)$ beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für x die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*,
für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

- **für Aussageformen, die von weiteren Variablen abhängen:**

Existenzquantor $\exists x \; (\ldots)$ und Allquantor $\forall x \; (\ldots)$ beschreiben Aussage*formen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über x die Aussage bereits gemacht ist.