Algorithmik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

9. Vorlesungswoche

Algorithmik 9

Berechnung maximaler Flüsse in q/s-Netzwerken

Beweis der Laufzeit des Algorithmus von Edmonds-Karp:

Def.: $\delta_f(u,v)$ sei die Anzahl der Kanten zwischen u und v im Restegraphen G_f

Breitensucheigenschaften fürQuelle s und Senke t:

Lemma 1: Jeder Erweiterungsweg P_f in einem Graphen G_f hat die minimale Anzahl von Kanten.

Lemma 2: Für jeden Erweiterungsweg P_f in einem Graphen G_f, der die Kante (u,v) benutzt gilt:
$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$

Detailbeweise für die Beweisskizze vom letzten Mal:

Lemma 4.5.8: Seien f, f´ zwei hintereinander von Edmonds-Karp erzeugte Flüsse:
Dann gilt für alle $v \neq s,t$: $\delta_f(s,v) \leq \delta_{f'}(s,v) + 1$

Lemma 4.5.9: Eine Kante wird höchstens n/2 mal kritisch.

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Alt, Kap. 4.5.4 (nach diesem richtete sich der Vorlesungsbeweis)
Cormen, Kap. 26.2 (entspricht ebenfalls dem Vorlesungsbeweis)
Turau, Kap. 6.3 (anderer Beweisaufbau und Notation)

Algorithmik 9

Berechnung maximaler Flüsse in q/s-Netzwerken

Algorithmus von Dinic

Def.: Levelgraph L_f: **(Turau: Niveaugraph G'_f)**

Entferne aus G_f alle Kanten (u,v) mit $\delta_f(s,v) \leq \delta_{f'}(s,u)$

Def.: blockierender Fluss:

Jeder Weg von s nach t hat eine kritische Kante

Satz: f maximal $\Rightarrow$ f blockierend

Def. (Flusserweiterung):

Sei r ein Fluss in L_f. Für jede Kante e setze $f'(e) = f(e) + r(e) - r(\overleftarrow{e})$

Satz: $|f'| = |f| + |r|$

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Turau, Kap. 6.4 (siehe auch Ausarbeitung und Vortrag Seminararbeit C. Padberg)
Alt, Kap. 4.7
Cormen, Kap. 26.4 (Push-Relabel-Algorithmen)

Algorithmik 9

Berechnung maximaler Flüsse in q/s-Netzwerken

Algorithmus von Dinic

1) Initialisiere f mit 0.
Repeat
    2a) Berechne L_f
    2b) Suche blockierenden Fluss in L_f
    3) Erhöhe f um den blockierenden Fluss
until kein blockierender Fluss mehr vorhanden (t ist in L_f nicht mehr erreichbar von s)

Unterschied zu Edmonds-Karp:
Jeder Pfad im Fluss wird maximiert, nicht nur ein einzelner

Laufzeit: $O(n^2m)$ Verbesserung in Turau: $O(n^3)$

Beweisskizze für Laufzeit:

In jedem Durchlauf erhöht sich $\delta_f(s,t)$ um mindestens 1 $\Rightarrow$ es gibt O(n) Schleifendurchläufe

2a) und b) kann kombiniert in einer wiederholten Tiefensuche vorgenommen werden: O(nm)
Verbesserung in Turau: $O(n^2)$

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Turau, Kap. 6.4 (siehe auch Ausarbeitung und Vortrag Seminararbeit C. Padberg)
Alt, Kap. 4.7 (Details für Laufzeitbeweis in Vorlesung nicht behandelt)
Cormen, Kap. 26.4 (Push-Relabel-Algorithmen: mit Korrektheitsbeweis, in Vorlesung nicht behandelt)

Algorithmik 9

Matchings in Graphen

Def.: Ein Matching ist eine Menge von Kanten, die keine Ecken gemeinsam haben.

Def.: maximales Matching:

i) möglichst viele Kanten (nur das wird in den Referenzen unten untersucht)

ii) Für bewertete Kanten: größtmögliche Bewertungssume

Def.: Mengentheoretische Formulierung des Graphen-Matchings (**2DM**):

Gegeben ein Menge $E \subseteq VxV$: Finde eine maximale Teilmenge $T \subseteq E$ mit:

Alle Komponenten der Elemente von T sind paarweise verschieden

Def.: Verallgemeinerung des Graphen-Matchings (**kDM**):

Gegeben ein Menge $E \subseteq Vx...xV$: Finde eine maximale Teilmenge $T \subseteq E$ mit:

Alle Komponenten der Elemente von T sind paarweise verschieden

Satz: kDM ist NP-vollständig für $k \geq 3$ und 2DM ist in P

Referenzen, die *allgemeines* Matching zumindest ansprechen:

Cormen, Kap. 35.1 (Ende), Problemstellungen 35-4,35-5
Alt, Definition 4.6.1

Algorithmik 9

Flüsse in ganzzahligen Netzwerken

Satz: Gegeben ein Netzwerk mit ausschließlich ganzzahligen Kapazitäten. Dann ist der Wert des maximalen Flusses ebenfalls ganzzahlig.

Hausaufgabe: Beweisen Sie den Satz ohne vollständige Induktion, sondern vielmehr mit Hilfe eines Satzes aus der 8. Vorlesungswoche direkt.

Korollar: In einem 0-1-Netzwerk (alle Kapazitäten sind 0 oder 1) besteht der maximale Fluss aus der maximalen Anzahl von kantendisjunkten Wegen zwischen s und t.

Referenzen zur Vertiefung und Irreführung:

Cormen, Satz 26.11 (Ganzzahligkeitstheorem): Der Beweistipp verführt zu Umständlichkeit!
Turau, Kap. 6.5