

Algorithmik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

11. Vorlesungswoche

Algorithmik 11

Voronoi-Diagramme

Definition und Struktur

Def.: Gegeben eine Menge S von n Referenzpunkten in der Ebene.
Das Voronoi-Diagramm ist eine Datenstruktur zur Einteilung der Ebene in Regionen, die jeweils einen der Punkte von S als nächsten haben.

Struktur: Das Voronoi-Diagramm $V(S)$ besteht aus folgenden Objekten:

- Knoten: Punkte, die mindestens drei Referenzpunkte als nächsten haben.
- Kanten: Punkte, die genau zwei Referenzpunkte als nächsten haben.
- Regionen: Punkte, die genau einen Referenzpunkt als nächsten haben.

Eine Region ist eindeutig einem Referenzpunkt zugeordnet. Sie enthält die angrenzenden Kanten und Knoten als Attribute.

Eine Kante enthält die angrenzenden Regionen und Knoten als Attribute.

Ein Knoten enthält die angrenzenden Regionen und Kanten als Attribute.

Satz: Es gibt $O(n)$ Voronoi-Objekte.

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Klein, Kap. 5.1, 5.2

Algorithmik 11

Voronoi-Diagramme

Anwendungen

1) Bestimmung des „nächsten Postamts“ zu einem Punkt x

Algorithmus ($O(n^2)$ preprocessing + $O(\log n)$ runtime):

Preprocessing ($O(n^2)$):

- i) Sortiere die Knoten aus $V(S)$ nach ihrer y -Koordinate und teile die Ebene in waagerechte Streifen ein.
- ii) Schneide die Kanten aus $V(S)$ mit den waagerechten Streifen und sortiere sie innerhalb eines Streifens nach ihrer x -Koordinate.

Runtime ($O(\log n)$):

- i) Bestimme mit Binärsuche den waagerechten Streifen von x .
- ii) Bestimme mit Binärsuche die beiden angrenzenden Kantensegmente innerhalb des waagerechten Streifens:
Die den beiden Kanten gemeinsame Region ist die Region, zu der x gehört.

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Klein, Kap. 5.3.1

Algorithmik 11

Voronoi-Diagramme

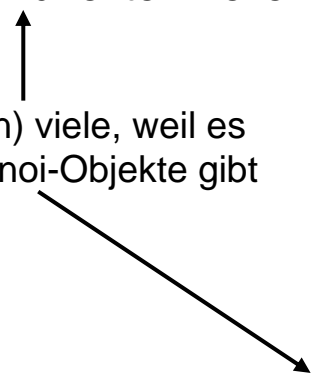
Anwendungen

2) Closest pair: Bestimmung der beiden Punkte mit geringstem Abstand

Algorithmus ($O(n)$):

- i) Bestimme für jeden Punkt aus S den Abstand zu allen direkten Zellennachbarn .
- ii) Ermittle unter diesen Abständen das Minimum.

insgesamt $O(n)$ viele, weil es nur $O(n)$ Voronoi-Objekte gibt



3) Minimal spannender Baum in der Ebene

Algorithmus ($O(n \log n)$):

- i) Bestimme für jeden Punkt aus S die kürzeste Verbindungskante zu allen direkten Zellennachbarn .
- ii) Ermittle unter diesen Verbindungskanten den minimal spannenden Baum mit dem Algorithmus von Kruskal.

Referenzen zum Nacharbeiten und Vertiefen:

Klein, Kap. 5.3.2, 5.3.3