

# ***Grundlagen der Theoretischen Informatik***

Sebastian Iwanowski  
FH Wedel

**Kap. 3: Verifikationstechniken**  
**Teil 5: Rekursion**

# Rekursion

**oder: Wie programmiert man wirklich elegant ?**

```
procedure f (n: Integer): Integer
begin {f}
  if (n=0)
  then
    return 1
  else
    return n • f(n-1)
end {f}
```

**Was berechnet diese Prozedur ?**

**Gibt es irgendwelche Vorbedingungen ?**

**Wie beweist man das alles ?**

# Verifikation von Rekursiven Prozeduren

## Wesentliche Schritte bei der Verifikation von Rekursiven Prozeduren:

- 1) Beweise, dass die Berechnungen der Prozedur kontinuierlich auf dem richtigen Weg sind, sodass nach Abbruch der Rekursion das Richtige berechnet ist.

(falls die Rekursion jemals abbricht)

Irgendetwas muss unverändert richtig sein → **Invariante (Bedingung)**

- 2) Beweise, dass die Rekursion abbricht.

Irgendetwas muss sich im Laufe der Rekursion ändern → **Variante (Zahl)**

***Wichtigste Beweistechnik: Vollständige Induktion***

# Verifikation von Rekursiven Prozeduren

## Verifikation von Rekursiven Prozeduren mit vollständiger Induktion:

Es muss in Induktionsverankerung und im Induktionsschluss von  $i$  auf  $i+1$  bewiesen werden, dass die Rekursion immer abbricht und das Richtige berechnet.

**Die Induktionsbehauptung muss also sowohl eine Invariante als auch eine Variante im Sinne der vorigen Definition enthalten.**

Typische Beispiele für die Wahl der Induktionsvariablen  $i$ :

- 1)  $i$  = Parameter im rekursiven Aufruf (oder Modifikationen davon)
- 2)  $i$  = Anzahl der *noch auszuführenden* Rekursionsschritte

Typische Beweistechnik im Induktionsschluss:

- 1) Die Abhängigkeit des Funktionswertes von  $i+1$  zum Funktionswert von  $i$  ergibt sich *direkt aus der Rekursionsgleichung*.
- 2) Finde variante Zahl, die für Abbruch der Rekursion sorgt  
(Tipp: Diese kann in der Regel als Induktionsvariable gewählt werden).

# Primitiv rekursive Funktionen

$$f(n) = \begin{cases} c & \text{für } n = 0 \\ h(n, f(\text{pred}(n))) & \text{sonst} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$

$(c \text{ sei eine beliebige Konstante})$

$(h(n, x) \text{ sei eine beliebige Funktion})$

$\text{pred}(n) \text{ sei eine natürliche Zahl } < n$

```
procedure f(n: Integer): ResultType
begin {f}
  if (n ≤ 0)
  then
    return c
  else
    return h(n, f(pred(n)))
end {f}
```

weil Integers auch < 0 sein können

**Vorteil:** Terminierung ist immer gewährleistet

# Endrekursive Funktionen

( $g(x)$  sei eine beliebige Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für ein logisches Prädikat } P(x) \\ f(r(x)) & \text{sonst} \end{cases}$$

$x$  beliebig

$r(x)$  sei eine beliebige Funktion, solange der Wertebereich im Definitionsbereich für  $f$  ist

( $x$  kann auch ein mehrdimensionaler Vektor sein !)

```
procedure f(x) : ResultType
begin {f}
  if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return f(r(x))
end {f}
```

**Vorteil:** Es gibt Algorithmus zur automatischen Implementierung auf dem Computer

# Transformation



Endrekursive Funktion

Schleife

*geht immer !*

```
procedure f(x) : ResultType
begin {f}
  if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return f(r(x))
end {f}
```

```
procedure f(x) : ResultType
begin {f}
  while  $\neg$ P(x) do
    x := r(x);
  return g(x)
end {f}
```

# Linear rekursive Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für ein logisches Prädikat } P(x) \\ h(x, f(r(x))) & \text{sonst} \end{cases}$$

```
procedure f(x): ResultType
begin {f}
  if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return h(x, f(r(x)))
end {f}
```

*Linear rekursive Funktionen können  
in Spezialfällen in endrekursive  
umgewandelt werden.*

**Primitiv rekursive Funktionen**



**Linear rekursive Funktionen**

**Endrekursive Funktionen**





# Allgemeine rekursive Funktionen

## Fibonacci-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ f(n-2) + f(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

## McCarthy-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} n-10 & \text{für } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{sonst} \end{cases}$$

## Ulam-Collatz-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ f(n/2) & \text{für gerade } n \\ f(3n+1) & \text{für ungerade } n \end{cases}$$