Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 2: Logik, Teil 2.2: Prädikatenlogik

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Alle, die die Vorlesung besuchen, bestehen die Klausur (A)
- Susi besucht die Vorlesung (B1)
- Bernd besucht die Vorlesung (B2)
- Linda besucht nicht die Vorlesung (B3)
- Alex hat die Klausur nicht bestanden (B4)

Gewünschte Folgerungen:

- Susi besteht die Klausur (C1)
- Bernd besteht die Klausur (C2)
- Linda ? Alex ?

Aussagenlogische Formeln:

- $A \wedge B1 \rightarrow C1$
- $A \wedge B2 \rightarrow C2$
- ...

Gewünschte Formel:

- besuchtVorlesung (x) → bestehtKlausur (x)

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Die Klausurnote eines Studenten, der alle Übungen gelöst hat, ist 1 oder 2 (A)
- Susi hat alle Übungen gelöst (B1)
- Bernd hat alle Übungen gelöst (B2)
- Linda hat nicht alle Übungen gelöst (B3)
- Alex hat eine 5 in der Klausur (B4)

Gewünschte Formel:

- hatAlleÜbungenGelöst (x) → (Klausurnote (x) ≤ 2)

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Eine Vorlesung, die nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird, ist langweilig (A)
- Susi ist eine Studentin (B1)
- Bernd ist ein Student (B2)
- Susi besucht GTI (B3)
- Bernd besucht GTI (B4)
- GTI ist nicht langweilig (B5)

Gewünschte Formel:

- $((\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \text{weiblich}(s)) \rightarrow \text{langweilig}(v))$
  $\wedge ((\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \neg\text{weiblich}(s)) \rightarrow \text{langweilig}(v))$

- Das ist nur eine sehr indirekte Beschreibung von (A) !
- Wie drückt man (A) direkt aus?
- Wie drückt man aus, dass es für jede Vorlesung überhaupt Studenten oder Studentinnen gibt, die sie besuchen ?

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**
- **keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“**

Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen**
- **keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“**

In der Prädikatenlogik:

- **Variable**
- **Prädikate**
- **Funktionen**
- **Quantoren**

Prädikatenlogik

- **Variable**

In eine Variable dürfen beliebige Elemente eingesetzt werden.

Könnten nicht die Literale in der Aussagenlogik als Variable aufgefasst werden ?

Was ist bei Literalen in der Aussagenlogik anders ?

- **Prädikate**

Ein Prädikat ist eine Aussage, die von anderen Werten abhängt.

Die Anzahl der Werte, von denen ein Prädikat abhängt, ist für jedes Prädikat eine beliebige, aber feste Zahl.

Ein Prädikat, das von k Werten abhängt, heißt k-stellig.
Kurzform: $P(x_1, x_2, ..., x_k)$

Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Prädikaten:**

1. Zwei Personen sind miteinander verheiratet

2. Eine Person liebt eine andere

3. Eine Person hasst eine andere

4. Eine Person besucht die Vorlesung GTI

5. Eine Person besucht eine beliebige Vorlesung

6. Ein Ort liegt zwischen zwei anderen

Prädikatenlogik

- **Funktionen**

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die einer Menge von Werten einen neuen Wert eindeutig zuordnet.
Kurzform: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$

Eine Funktion, die von k Werten abhängt, heißt k-stellig.

Bsp.: Drücke folgenden Sachverhalt mit prädikatenlogischen Hilfsmitteln aus:

$(2 < x < 4) \land (0 < y < 6) \land (x + y > 7) \land (x \cdot y < 10)$

Prädikatenlogik

- **Quantoren**

  - **für Aussageformen, die nur von x abhängen:**

    Der Existenzquantor $\exists$x (...) beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für x gibt, der die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

    Der Allquantor $\forall$x (...) beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für x die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

    Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

    Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*, für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

  - **für Aussageformen, die von weiteren Variablen abhängen:**

    Existenzquantor $\exists$x (...) und Allquantor $\forall$x (...) beschreiben Aussage*formen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über x die Aussage bereits gemacht ist.

Prädikatenlogische Formeln

- **Eine prädikatenlogische Formel 1. Stufe ist eine Verknüpfung von endlich vielen Variablen, Funktionen und Prädikaten mit aussagenlogischen Operatoren oder Quantoren, die sich nur auf Variable beziehen.**

Bsp.: $\forall x \; (R(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \land \exists y \; (\neg P(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \lor R(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \;)$

Grüne Vorkommen von y und z sind **frei**.
Rote Vorkommen von x, y und z sind **gebunden**.

Prädikatenlogische Formeln

- **Eine Belegung einer Formel ist eine Zuweisung von *Werten aus festgelegten Definitionsbereichen an die freien Variablen* derart, dass dieselben Variablen immer denselben Wert erhalten.**

- **Eine Formel heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel wahr ist.**

☹

  - Das Erfüllbarkeitsproblem ist in der Prädikatenlogik nicht entscheidbar, d.h. kein Algorithmus kann jemals in der Lage sein, von jeder Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

Das prädikatenlogische Erfüllbarkeitsproblem ist unlösbar !

Das Wort Belegung kann noch allgemeiner aufgefasst werden:

- **Eine Belegung einer Formel mit abstrakten Prädikats-, Funktions- und Variablensymbolen ist eine Zuweisung von konkreten Prädikaten, Funktionen und Werten an die Variablen, die mit den Definitionen übereinstimmt.**

„Interpretation“, „Modell“

Anwendung: Logische Programmierung in der KI

Eigentliches Ziel: Konstruktionsaufgabe

erst recht nicht lösbar für allgemeine Formeln

Gegeben eine Menge $\mathscr{F}$ von logischen Formeln. Bestimme alle Formeln F, die aus $\mathscr{F}$ folgen.

Hilfsziel: Verifikationsaufgabe

nicht lösbar für allgemeine Formeln

Gegeben eine Menge $\mathscr{F}$ von logischen Formeln und eine (neue) logische Formel F.
Bestimme, ob F aus $\mathscr{F}$ folgt.

Äquivalente Formulierungen zur Verifikationsaufgabe:

1) Gegeben eine Menge $\mathscr{F}$ von logischen Formeln und eine (neue) logische Formel F. Bestimme, ob die Formelmenge $\{\neg F\} \cup \mathscr{F}$ widersprüchlich ist.

2) Gegeben eine Menge $\mathscr{F}$ von logischen Formeln. Bestimme, ob sie widersprüchlich ist.

entspricht Erfüllbarkeitsproblem: nicht lösbar für allgemeine Formeln

Möglichkeit zur Vereinfachung des Problems:

Schränke die zulässigen Formeln ein!

Anwendung: Logische Programmierung in der KI

Das Prinzip der Programmiersprache PROLOG:

PROLOG versucht, mittels wiederholter und verschachtelter Anwendung von **Resolution** und anderen Techniken zu einer gegebenen Formelmenge einen Widerspruch zu finden.

Satz (Widerspruchsvollständigkeit):

Falls die Formelmenge widersprüchlich ist, kann man den Widerspruch immer finden.

Was fehlt ?

Satz (*Folgerung* der Folgerbarkeit aus der Widerspruchsaufdeckung):

Wer zu jeder Formelmenge jeden Widerspruch aufdecken kann,
kann zu jeder Formelmenge und zu jeder neuen ***daraus folgenden*** Formel beweisen,
dass die neue Formel aus der alten Formelmenge folgt.

Was fehlt hier ?

Anwendung: Logische Programmierung in der KI

Wie macht man aus PROLOG eine <u>vollständige</u> Programmiersprache ?

Durch Beschränkung der Eingabe !

PROLOG akzeptiert nur Mengen von Formeln der Form:

$$\mathbf{p \wedge q \wedge \ldots \wedge r \rightarrow x}$$

Regeln (Hornklauseln)

In der Voraussetzung darf nur eine Konjunktion von positiven Literalen stehen.

<u>Satz (Vollständigkeit der Resolution auf Hornklauseln):</u>

☺ Für jede Menge von Hornklauseln und eine neue Hornklausel kann Prolog nach endlicher Zeit entscheiden, ob die neue Hornklausel aus der alten Menge folgt ***oder nicht***

☹ ***Anmerkung: „Endliche Zeit“ kann „sehr lange“ heißen !***

Anwendung: Logische Programmierung in der KI

Wie erkennt man, ob eine Formelmenge nur aus Formeln besteht, die äquivalent zu Hornklauseln sind ?

Die Formelmenge sei in KNF gegeben, d.h. als eine Konjunktion von Disjunktionen.
Die einzelnen Klauseln (Disjunktionen) seien die einzelnen Formeln.
Eine einzelne Formel ist nach Definition eine Hornklausel, wenn sie äquivalent zu einer Regel ist, deren Voraussetzungen alle durch einen positiven Literal repräsentiert sind.

Eine Hornklausel sieht also immer so aus:

$\neg p \vee \neg q \vee \ldots \vee \neg r \vee x$ *Maximal ein Literal ist positiv.*

Anmerkung:
Natürlich kann man eine beliebige Aussage auch durch einen negativen Literal repräsentieren.
Um die Hornklauseleigenschaft zu erhalten, muss dieser Literal dann aber in allen Voraussetzungen von Regeln, in denen er vorkommt, in negativer Form auftauchen.
Daher können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf positive Literale beschränken.

Prädikatenlogik

Beschreibung der semantischen Eigenschaft einer Formel $\mathbf{F(x_1, x_2, ..., x_k)}$ mit prädikatenlogischen Mitteln:

- **F ist erfüllbar:**

  $$\exists\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widersprüchlich:**

  $$\forall\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \bot)$$

- **F ist gültig (Tautologie):**

  $$\forall\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widerlegbar:**

  $$\exists\ x_1, x_2, ..., x_k \quad (F(x_1, x_2, ..., x_k) \leftrightarrow \bot)$$

Was fällt auf ?

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

$$\neg\forall x\,(F(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x))$$

$$\neg\exists x\,(F(x)) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg F(x))$$

Verallgemeinerung von deMorgan

$$\forall x\ \forall y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\,(F(x,y))$$

$$\exists x\ \exists y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\,(F(x,y))$$

Vertauschung gleicher Quantoren

Was gilt bei der Vertauschung verschiedener Quantoren ? ($\Leftrightarrow$,$\Rightarrow$,$\Leftarrow$,$\not\Leftrightarrow$)

$\exists x\ \forall y\,(F(x,y))$ $\forall y\ \exists x\,(F(x,y))$

$\exists y\ \forall x\,(F(x,y))$ $\forall x\ \exists y\,(F(x,y))$

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in $\wedge$ oder $\vee$? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \not\Leftrightarrow$)

$\forall x\, (F(x)) \vee \forall x\, (G(x))$	$\forall x\, (F(x) \vee G(x))$
$\forall x\, (F(x)) \wedge \forall x\, (G(x))$	$\forall x\, (F(x) \wedge G(x))$
$\exists x\, (F(x)) \vee \exists x\, (G(x))$	$\exists x\, (F(x) \vee G(x))$
$\exists x\, (F(x)) \wedge \exists x\, (G(x))$	$\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Präfix-Notation	Infix-Notation	Postfix-Notation
(Standard in Prädikatenlogik)	(Standard in Arithmetik)	(Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern)
`lessThan (x,y)`	`x < y`	`x, y, <`
`equal (x,y)`	`x = y`	`x, y, =`

Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:

`x ≤ y`

`x ≥ y`

`x ≠ y`

`x > y`

Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Bilde das Gegenteil von:

1) $(x>0) \lor ((y+x) \leq 0)$

2) $\forall y<0\ ((x>0) \lor ((y+x) \leq 0))$

Prädikatenlogik

Was bedeuten eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren ?

$\forall\ y{\in}D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\forall\ y\ (y{\in}D \rightarrow P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y\ (y{\notin}D \lor P(y))$

$\exists\ y{\in}D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\exists\ y\ ((y{\in}D \land (P(y))$

Daher gilt für die Negation:

$\neg(\forall\ y{\in}D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\forall\ y\ (y{\notin}D \lor P(y))) \Leftrightarrow \exists\ y\ (y{\in}D \land \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \exists\ y{\in}D\ (\neg P(y))$

$\neg(\exists\ y{\in}D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\exists\ y\ (y{\in}D \land P(y))) \Leftrightarrow \forall\ y\ (y{\notin}D \lor \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y{\in}D\ (\neg P(y))$

➔ **Eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren werden bei Negationen nicht ebenfalls negiert !**

Prädikatenlogik

Anwendung auf Aufgabe von vorhin:

Bilde das Gegenteil von: $\forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$

Lösung:

$\forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0) \lor ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$

ist Kurzschreibweise von: $\forall \mathbf{y}\ (\neg(\mathbf{y}<0) \lor ((\mathbf{x}>0)\lor((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)))$

„Gegenteil“ soll heißen: Negation der oben angegebenen Formel

$\neg \forall \mathbf{y}\ (\neg(\mathbf{y}<0) \lor ((\mathbf{x}>0)\lor((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)))$

$\Leftrightarrow \exists \mathbf{y}\ ((\mathbf{y}<0) \land (\mathbf{x}\leq 0) \land ((\mathbf{y}+\mathbf{x})>0)))$

$\Leftrightarrow \exists \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}\leq 0) \land ((\mathbf{y}+\mathbf{x})>0)))$

$\Leftrightarrow \perp$ **für alle x**

Also ist die Negation ein Widerspruch

Was folgt dann für die ursprüngliche Formel ?

Prädikatenlogik

Achtung: Unterscheide, wo die Negation steht:

Aussagen für negierte Formeln: $(F(x) \leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\neg F(x) \leftrightarrow \bot)$

(gilt für *beliebige* x)

Damit gilt:

$F(x)$ ist Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg F(x)$ ist Widerspruch

$F(x)$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\neg F(x)$ ist widerlegbar

Also ist die Formel $F(x) \Leftrightarrow \forall y{<}0\ ((x{>}0) \vee ((y+x) \leq 0))$ eine Tautologie,
da $\neg F(x) \Leftrightarrow \neg(\forall y{<}0\ ((x{>}0) \vee ((y+x) \leq 0)))$ ein Widerspruch ist.

Negierte Aussagen für dieselbe Formel $F(x)$:

$F(x)$ ist Tautologie $\Leftrightarrow$ $F(x)$ ist nicht widerlegbar

$F(x)$ ist widerlegbar $\Leftrightarrow$ $F(x)$ ist nicht Tautologie

$F(x)$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $F(x)$ ist nicht widersprüchlich

$F(x)$ ist widersprüchlich $\Leftrightarrow$ $F(x)$ ist nicht erfüllbar

Unterscheide: $F(x)$ ist nicht widerlegbar $\neq$ $\neg F(x)$ ist widerlegbar