$A = (1, 2, 3)$

$B = (1, 2)$

$C = 1$

Grundmenge $\mathbb{N}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$E = \{1, 2\}$

$F = ((1, 2), 3)$

$G = \{\{1, 2\}, 3\}$

$H = \{\{1, 2\}\}$

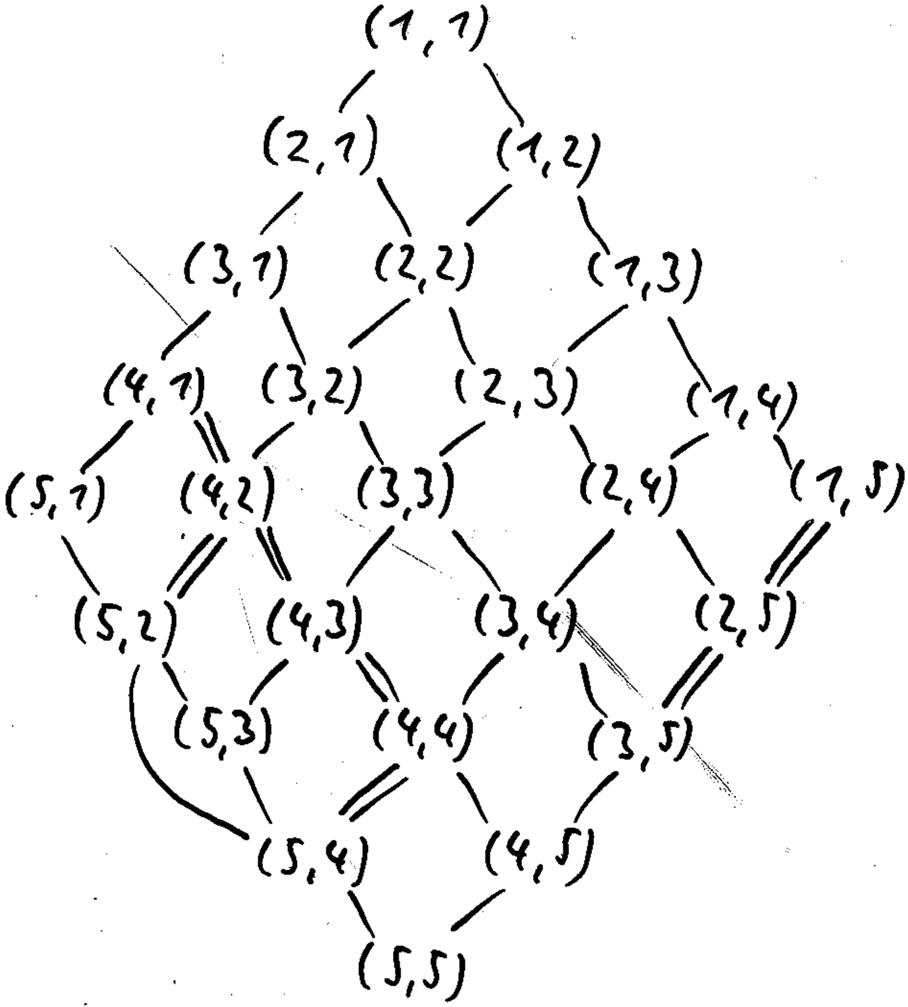
$I = \{(1, 2), 3\}$

$J = (\{1, 2\}, 3)$

1) Nenne alle $\in$- und $\subset$-Beziehungen!

2) Nenne alle Beziehungen bzgl. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$!

3) Nenne alle Beziehungen bzgl. karthesischer Produkte, in denen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vorkommt!



Hasse-Diagramm für Ordnungsrelationen $\preceq$:

Ein Element x ist von oben mit einem Element y verbunden $\Longleftrightarrow$ 1) $y \preceq x$

$\wedge$ 2) $(y \preceq z) \wedge (z \preceq x) \Rightarrow (y = z) \vee (z = x)$

Ein Hasse-Diagramm muss nicht zusammenhängend sein!

Bsp. (s.o.):

Es gebe nur die Ergebnisse

$\underset{+}{(4,1)}$, $(4,2)$, $(5,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $\underset{-}{(5,4)}$, $\underset{+}{(1,5)}$, $(2,5)$, $\underset{-}{(3,5)}$

$M = \{1, 2, 3\}$ $N = \{a, b, c, d\}$ $P = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$F = \{(1, a); (2, b); (3, c); (1, d)\}$

$F' = \{(1, a); (2, b); (3, c)\}$

$F^{-1} = \{(a, 1); (b, 2); (c, 3); (d, 1)\}$

$(F')^{-1} = \{(a, 1); (b, 2); (c, 3)\}$

$G = \{(a, 3); (b, 3); (c, 7); (d, 1)\}$

Welche der Relationen ist auch eine Funktion?

$G \circ F = ?$

$G \circ F' = ?$

Elemente aus $\{0,1\}^3$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$(f_1 \oplus f_2)(x)$	$(f_1 \odot f_2)(x)$	$\sim f_1(x)$	$Null(x)$	$Eins(x)$
$(0,0,0)$	1	0	1	0	0	0	1
$(0,0,1)$	0	0	0	0	1	0	1
$(0,1,0)$	0	1	1	0	1	0	1
$(0,1,1)$	1	1	1	1	0	0	1
$(1,0,0)$	0	1	1	0	1	0	1
$(1,0,1)$	1	1	1	1	0	0	1
$(1,1,0)$	0	0	0	0	1	0	1
$(1,1,1)$	1	0	1	0	0	0	1

Jede Funktion entspricht einem 8-Tupel aus Nullen und Einsen.
Es gibt $2^8 = 256$ solche Funktionen

für allgemeines n:
Jede Funktion entspricht einem 2^n-Tupel aus Nullen und Einsen.
Es gibt 2^{2^n} solche Funktionen.

Satz: Unter den Zahlen $n-2, n-1, n$ $(n \geq 2)$

$A(n)$ ist immer eine Zahl, die durch 3 teilbar ist.

Beweis durch vollst. Induktion über n:

Ind.verankerung für $n=2$:

$A(2)$ Unter $0, 1, 2$ ist $0 = 3 \cdot 0$ durch 3 teilb.

q.e.d.

Ind.schluss von n auf $n+1$:

$A(n)$ Obiger Satz gelte für n (Ind.voraussetzung)

$A(n+1)$ z.z.: Unter $n-1, n, n+1$ ist auch eine Zahl, die durch 3 teilbar ist.

Beweis:

1. Fall: In Ind.voraussetzung ist $n-1$ oder n durch 3 teilb.

$\Rightarrow$ Beh. für $n+1$ ist gegeben q.e.d.

2. Fall: In Ind.voraussetzung ist $n-2$ durch 3 teilb.,

also: $n-2 = 3 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n+1 = n-2+3 = 3 \cdot k + 3 = 3 \cdot (k+1)$$

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $n+1$ ist auch durch 3 teilb.

q.e.d.

In beiden Fällen wurde eine Zahl gefunden, die durch 3 teilbar ist.

Damit gilt $A(n+1)$ immer q.e.d.

Aufgabe 07-3)

Gegeben:

Wir werden die folgende Aussage mit vollständiger Induktion beweisen:

> Seien l_1, l_2, ... l_n verschiedene Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind ($n \geq 2$). Dann haben alle diese Geraden einen Punkt gemeinsam.

Beweis:

1. Für $n=2$ ist die Aussage wahr, denn je 2 nichtparallele Geraden schneiden sich.

2. Angenommen, die Aussage gilt für $n=n_0$. Seien nun $n=n_0+1$ Geraden l_1, ..., l_n mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n_0 dieser Geraden (also l_1, l_2, ... l_{n-1}) einen gemeinsamen Punkt; nennen wir ihn einmal x. Genauso haben auch die n_0 Geraden (l_1, l_2, ..., l_{n-2}, l_n) einen Punkt gemeinsam; wir nennen ihn y. Die Gerade l_1 liegt in beiden Gruppen, enthält also sowohl x als auch y. Das trifft auch auf l_{n-2} zu. Nun schneiden sich aber l_1 und l_{n-2} in einem eindeutigen Punkt, also muß $x=y$ sein. Deshalb haben alle Geraden l_1, ... l_n einen gemeinsamen Punkt, nämlich x.

Frage: Irgendetwas ist faul daran. Nur was?

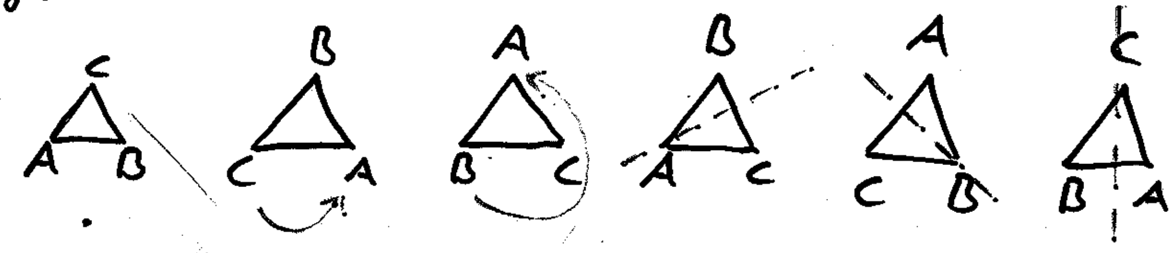
$$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$$
$$\boxed{ggT}(700,220) = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$kgV(700,220) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$ggT(700,220) \cdot kgV(700,220) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11}_{220} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}_{700}$$

$$15750 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$694575 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$$
$$ggT(15750, 694575) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$kgV(15750, 694575) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$$
$$ggT \cdot kgV = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}_{15750} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{694575}$$

Aufgabe 8-3



$id = \rho_0$ $\quad \rho_1 \quad \rho_2 \quad \sigma_A \quad \sigma_B \quad \sigma_C$

	$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_A	σ_B	σ_C
1	ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_A	σ_B	σ_C
3	ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	σ_C	σ_A	σ_B
3	ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	σ_B	σ_C	σ_A
2	σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	ρ_0	ρ_1	ρ_2
2	σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	ρ_2	ρ_0	ρ_1
2	σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	ρ_1	ρ_2	ρ_0

$\rho_0 \Leftrightarrow x$

$\rho_1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}$

$\rho_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x}$

$\sigma_A \Leftrightarrow \frac{1}{x}$

$\sigma_B \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}$

$\sigma_C \Leftrightarrow 1-x$

$\mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}_4$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\mathbb{Z}_4$

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^*$

	*	1	3	5	7
1	1	1	3	5	7
2	3	3	1	7	5
2	5	5	7	1	3
2	7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_{10}^*$

	*	1	3	7	9
1	1	1	3	7	9
4	3	3	9	1	7
4	7	7	1	9	3
2	9	9	7	3	1

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
1	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
2	(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
2	(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
2	(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

$\mathbb{Z}_4$

	+	0	1	2	3
1	0	0	1	2	3
4	1	1	2	3	0
2	2	2	3	0	1
4	3	3	0	1	2

	0	1	x	$x+1$
$\mathbb{Z}_2^2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
	0	1	2	3

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

	0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
$\mathbb{Z}_2^3$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
	0	1	2	3	4	5	6	7

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$GF(9) = \{ \underset{0}{0}, \underset{1}{1}, \underset{2}{2}, \underset{3}{x}, \underset{4}{x+1}, \underset{5}{x+2}, \underset{6}{2x}, \underset{7}{2x+1}, \underset{8}{2x+2} \}$

irreduzibles Polynom über $\mathbb{Z}_3[x]$ vom Grad 2: $\underline{\underline{x^2+1}}$

Isomorphismus zwischen $(GF(9)\setminus\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_8, +)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & 1 & \longmapsto 0 \\
x+1 & 4^1 = 4 & \longmapsto 1 \\
2x & 4^2 = 6 & \longmapsto 2 \\
2x+1 & 4^3 = 7 & \longmapsto 3 \\
2 & 4^4 = 2 & \longmapsto 4 \\
2x+2 & 4^5 = 8 & \longmapsto 5 \\
x & 4^6 = 3 & \longmapsto 6 \\
x+2 & 4^7 = 5 & \longmapsto 7 \\
1 & 4^8 = 1 & \longmapsto 0
\end{array}
$$

$A \to (B,4) \to (G,5) \to (F,10)$

$B \to (A,4) \to (C,7) \to (G,2)$

$C \to (B,7) \to (G,1) \to (Z,13)$

$D \to (E,5) \to (Z,1)$

$E \to (F,3) \to (G,9) \to (Z,4) \to (D,5)$

$F \to (A,10) \to (G,6) \to (E,3)$

$G \to (A,5) \to (B,2) \to (C,1) \to (E,9) \to (F,6)$

$Z \to (C,13) \to (D,1) \to (E,5)$

B $\quad A_0 \quad B_{4,A}$

U $\quad C_{11,B} \quad G_{5,A} \quad D_\infty \quad E_\infty \quad F_{10,A} \quad Z_\infty$

B $\quad A_0 \quad B_{4,A} \quad G_{5,A}$

U $\quad C_{6,G} \quad F_{10,A} \quad E_{14,G} \quad D_\infty \quad Z_\infty$

B $\quad A_0 \quad B_{4,A} \quad G_{5,A} \quad C_{6,G}$

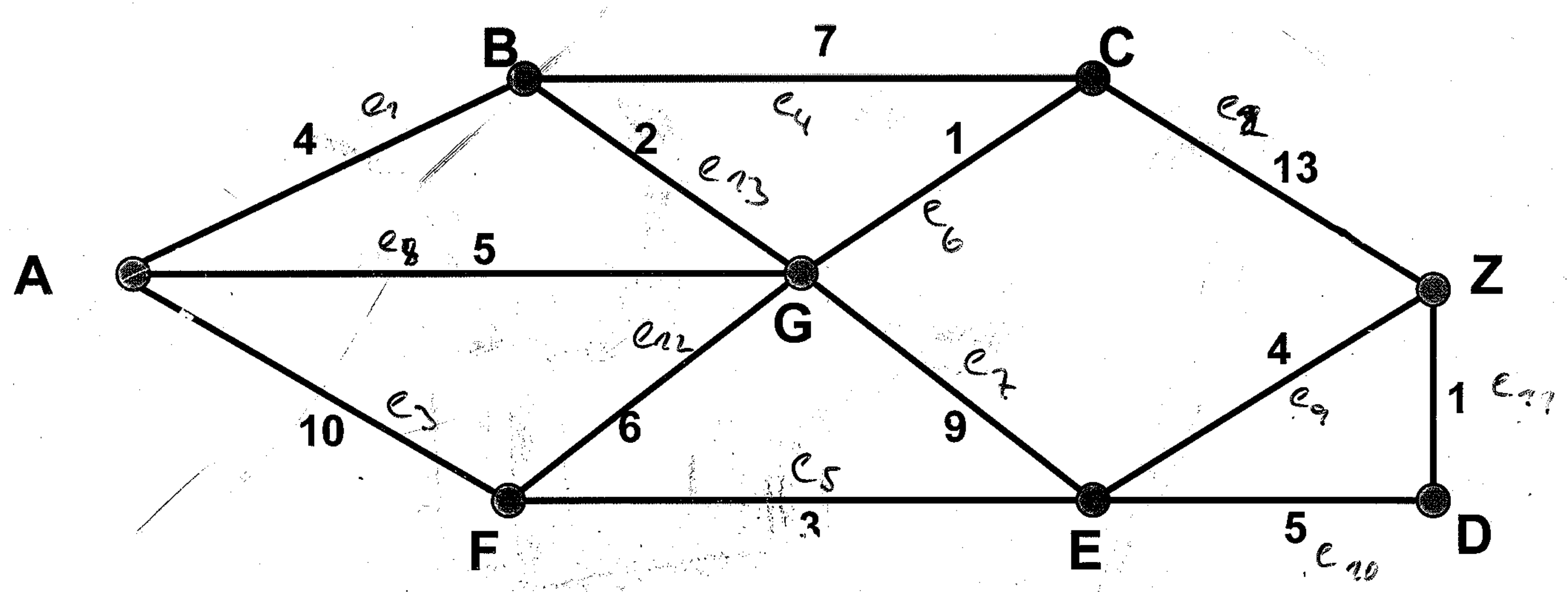
U $\quad F_{10,A} \quad E_{14,G} \quad D_\infty \quad Z_{19,C}$

B $\quad A_0 \quad B_{4,A} \quad G_{5,A} \quad C_{6,G} \quad F_{10,A}$

U $\quad E_{13,F} \quad D_\infty \quad Z_{19,C}$

B $\quad A_0 \quad B_{4,A} \quad G_{5,A} \quad C_{6,G} \quad F_{10,A} \quad E_{13,F}$

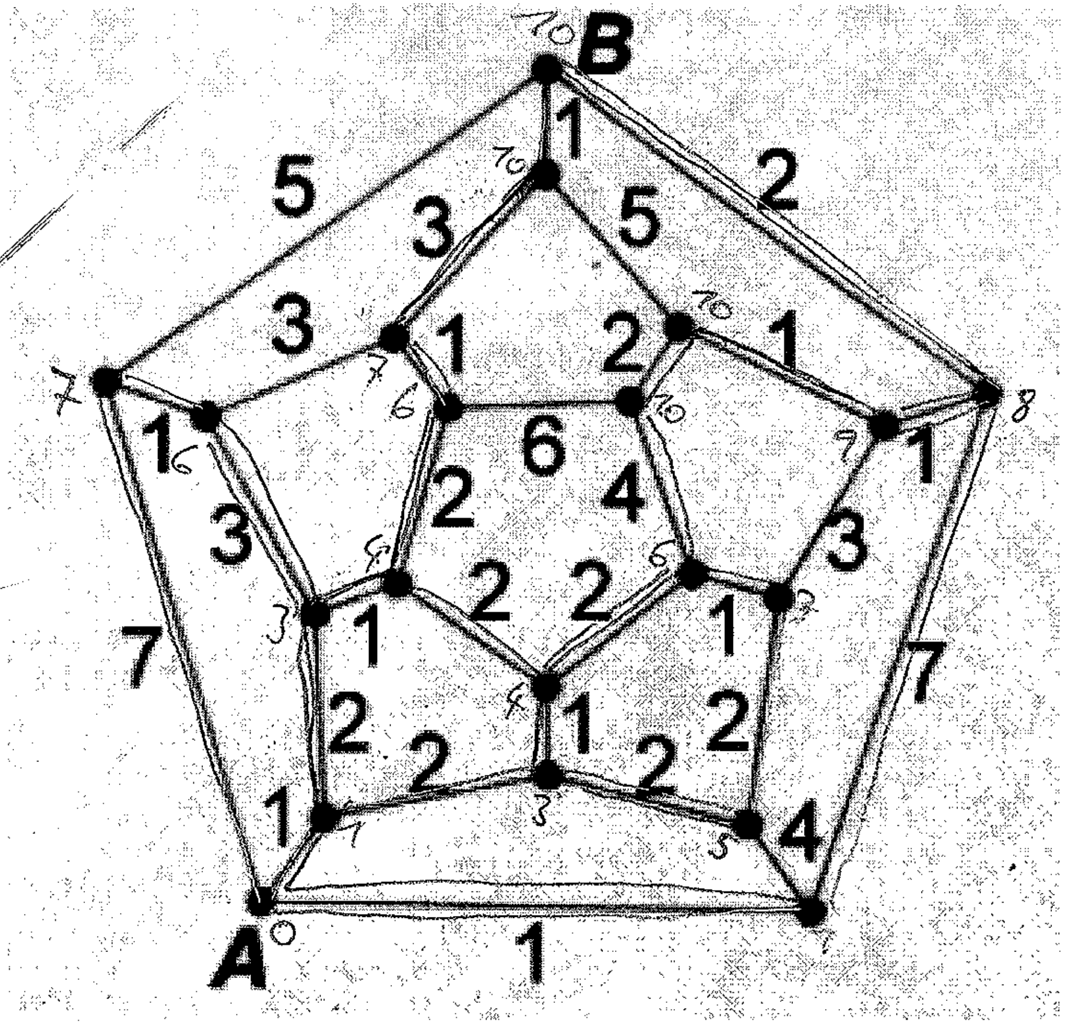
U $\quad D_{18,E} \quad Z_{17,E}$



A
B
C
D
E
F
G
Z
4
7
2
1
13
5
6
9
4
1
10
3
5

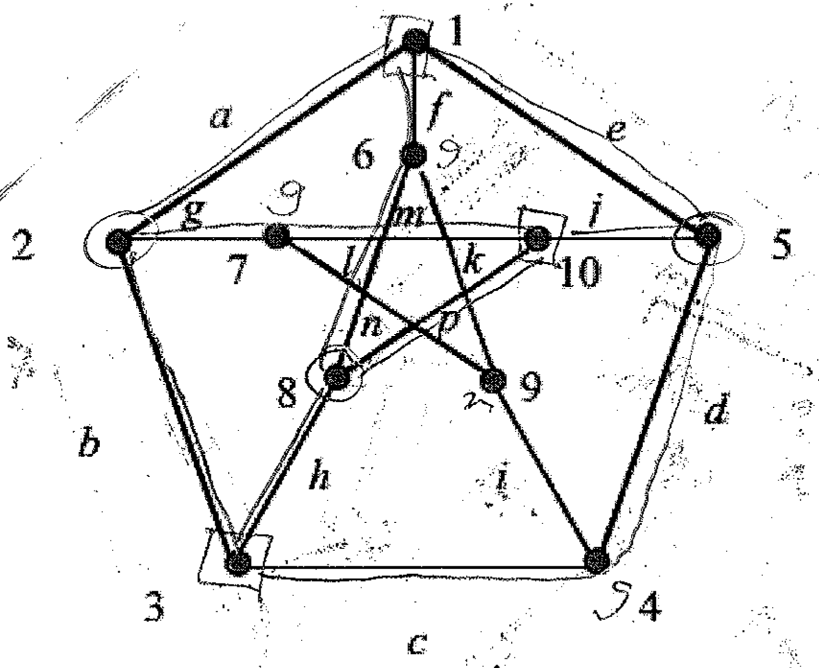
Aufgabe 12-7)

Bestimmen Sie in dem gewichteten Dodekaedergraphen einen minimalen spannenden Baum nach dem Algorithmus von Kruskal:



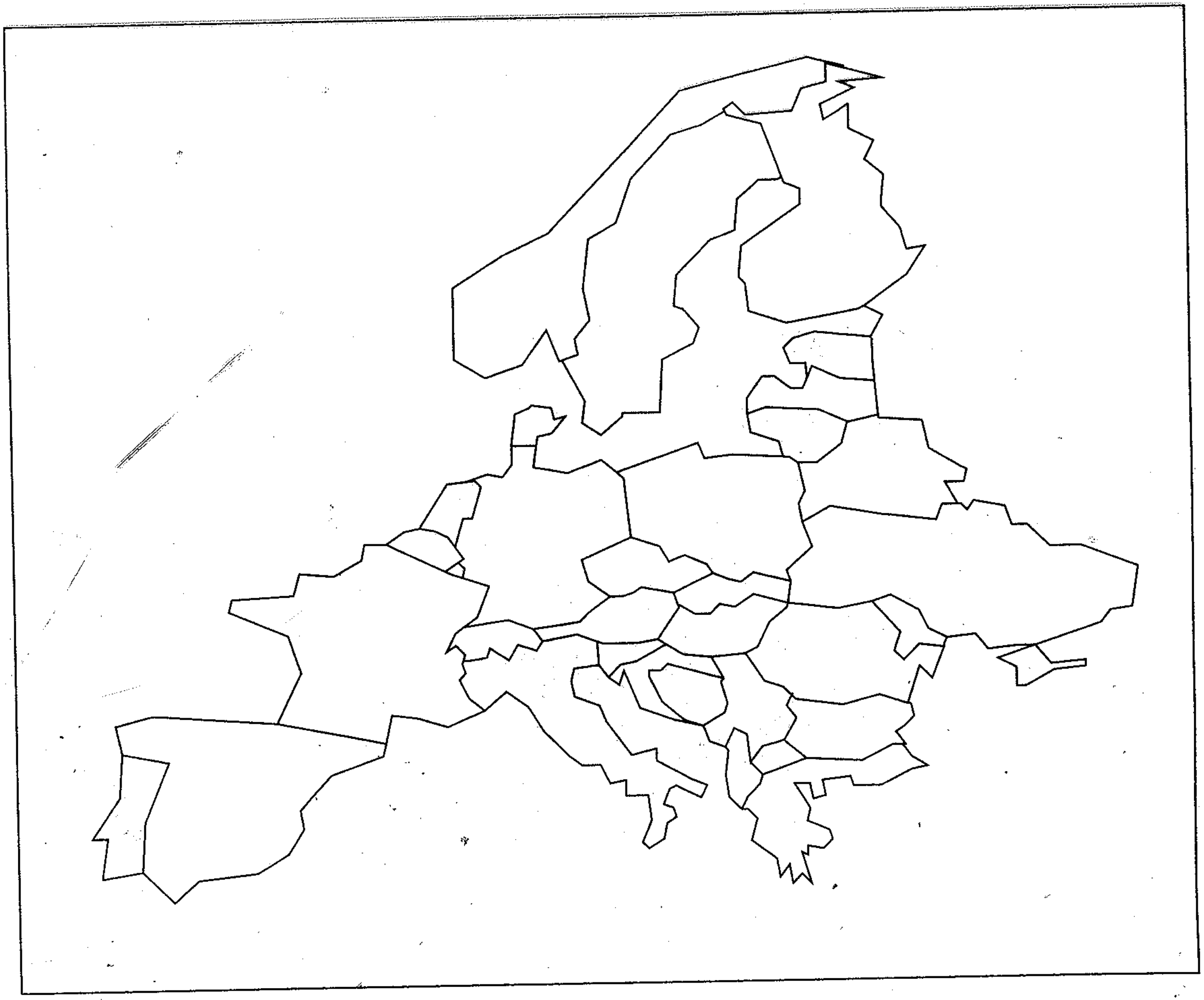
Aufgabe 12-2)

Geben Sie die Adjazenzmatrix, die Adjazenzliste und die Inzidenzmatrix des folgenden Graphen an:



Petersen-Graph

Zeichen Sie den Graph so, dass die Ecken 6, 7, 8, 9, 10 außen liegen.



Eine Beispielkarte für das Vier-Farben-Problem