

# ***Diskrete Mathematik***

Sebastian Iwanowski

FH Wedel

Kapitel 1: Grundlagen der Mathematik

## **Referenzen zum Nacharbeiten:**

Lang 1, 2.1

Meinel 1

Dean 3, 4

Hachenberger 1.4 (teilweise)

# Inhaltlicher Umfang dieser Vorlesung

## Inhaltliche Voraussetzungen:

Logisches Denken, Mathematik bis 9. Klasse (Gymnasium)

## Lernziele dieser Vorlesung:

Verständnis für Mathematik und Freude daran

Elementare Konzepte: Logik, Mengenlehre, Zahlen

Fortgeschrittene Konzepte: Beweisstrategien, Zahlentheorie, Algebra

Spezielle Gebiete der Diskreten Mathematik: Kombinatorik, Graphentheorie

## Direkte inhaltliche Relevanz für folgende Vorlesungen:

Informationstechnik, Digitaltechnik, Programmieren, Algorithmen und Datenstrukturen in C,

Analysis, Lineare Algebra, Grundlagen der Theoretischen Informatik

# Literatur

## Lehrbücher, nach denen diese Vorlesung vorgeht:

Albrecht **Beutelspacher** / Marc-Alexander Zschiegner:  
*Diskrete Mathematik für Einsteiger*,  
Vieweg 2004 (2. Auflage), ISBN 3-528-16989-3

Rainer **Lang**: *Vorlesungsskript für die Vorlesung Diskrete Mathematik*,  
FH Wedel 2005

Christoph **Meinel** / Martin Mundhenk:  
*Mathematische Grundlagen der Informatik*,  
Teubner 2002 (2. Auflage), ISBN 3-519-12949-3

# Literatur

## Weitere empfehlenswerte Lehrbücher:

Martin Aigner: Diskrete Mathematik,  
Vieweg 2001 (4. Auflage), ISBN 3-528-37268-0

Norman Biggs: Discrete Mathematics,  
Oxford University Press 2002, ISBN 0-19-850717-8

Neville Dean: *Diskrete Mathematik*,  
Pearson Studium, Reihe "im Klartext" 2003, ISBN 3-8273-7069-8

Dirk Hachenberger: Mathematik für Informatiker,  
Pearson Studium 2005, ISBN 3-8273-7109-0

Jiri Matousek / Jaroslav Nešetřil:  
*Diskrete Mathematik - Eine Entdeckungsreise*,  
Springer-Verlag 2001, ISBN 3-540-42386-9

# 1. Grundlagen der Mathematik

## 1.1 Einführung

**Was ist das Wesentliche der Mathematik ?**

**Mathematik ist in erster Linie das Erkennen von:**

- Strukturen
- Zusammenhängen
- Verallgemeinerungen
- Gemeinsamkeiten

*Was sich auf die Wirklichkeit bezieht,  
ist nicht sicher,  
und was sicher ist,  
ist nicht wirklich.*

**Erst aus diesen Prinzipien folgert man:**

- Rechenregeln
- Vorgehensweisen (Algorithmen)

**Formalismen dienen in der Mathematik zu**

- einer eindeutigen Ausdrucksweise
- einem besseren Verständnis für den Menschen

# 1. Grundlagen der Mathematik

## 1.1 Einführung

### Was ist Diskrete Mathematik ?

- Logik
- Mengenlehre
- Diskrete Zahlenbereiche
- Kombinatorik
- Graphentheorie
- Algebra

### Was gehört **nicht** zur Diskreten Mathematik ?

- Analysis / Funktionentheorie
- Lineare Algebra
- Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik
- ...

# 1.2 Aussagenlogik

## Aussagen und Wahrheitswerte

### Was ist eine Aussage ?

- Eine Aussage ist ein beliebiges Objekt.
- In der Aussagenlogik sind Aussagen unteilbar.
  - Wegen der Unteilbarkeit heißen Aussagen auch *Atome*

### Was ist ein Wahrheitswert ?

- Ein Wahrheitswert ist ein Element aus einer zweielementigen Menge (z.B. dargestellt als  $\{w, \bar{w}\}$  oder  $\{0,1\}$ ).

### Was macht die Aussagenlogik ?

- Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit Funktionen, die jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.
  - Solche Funktionen heißen *binäre Funktionen*

# 1.2 Aussagenlogik

## Operatoren zwischen Aussagen

Durch Operatoren werden aus alten Aussagen neue Aussagen geschaffen:

### Einstelliger Operator:

- Negation ( $\neg$ )

### Zweistellige Operatoren:

- Konjunktion ( $\wedge$ )
- Disjunktion ( $\vee$ )
- Implikation ( $\rightarrow$ )
- Äquivalenz ( $\leftrightarrow$ )

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

# 1.2 Aussagenlogik

## Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Äquivalenzregeln:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

*Kontraposition*

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

*Ersetzen der Implikation durch  $\neg$  und  $\vee$*

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

*Ersetzen der Äquivalenz durch Implikationen*

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

*deMorgansche Regeln*

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

*Doppelte Negation*

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

*Kommutativgesetze*

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

*Distributivgesetze*

# 1.2 Aussagenlogik

## Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Schlussregeln:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

*Modus ponens*

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

*Modus tollens*

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

*Kettenschluss*

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p$$

*Indirekter Beweis*

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$p \wedge q \Rightarrow q$$

*Logische Einschränkung*

$$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

*Logischer Ausschluss*

# 1.3 Prädikatenlogik

## Aussageformen, Variable und Prädikate

### Was ist eine Aussageform ?

- Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit Variablen aus bestimmten Definitionsbereichen.
- Die Belegung jeder Variable mit einem zulässigen Wert macht aus einer Aussageform eine Aussage

### Was ist ein Prädikat ?

- Ein Prädikat gehört zu einer Aussageform und beschreibt die Eigenschaft einer Wertekonstellation, eine Aussageform zu einer wahren Aussage zu machen.
- Für jede Wertekonstellation von Werten aus dem Definitionsbereich der Variablen ist das zu der jeweiligen Aussageform gehörende Prädikat definiert.
- Ein Prädikat kann wahr (erfüllt) oder falsch (nicht erfüllt) sein.

# 1.3 Prädikatenlogik

## Quantoren

- für Aussageformen, die **nur von  $x$**  abhängen:

Der **Existenzquantor**  $\exists x ( \dots )$  beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für  $x$  gibt, der die dahinter stehende Aussageform in  $x$  zu einer wahren Aussage macht.

Der **Allquantor**  $\forall x ( \dots )$  beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für  $x$  die dahinter stehende Aussageform in  $x$  zu einer wahren Aussage macht.

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine *Verschärfung*,  
für den Allquantor eine *Abschwächung* der Aussage.

- für Aussageformen, die **von weiteren Variablen** abhängen:

Existenzquantor  $\exists x ( \dots )$  und Allquantor  $\forall x ( \dots )$  beschreiben *Aussageformen*, die nur noch von den restlichen Variablen abhängen, da über  $x$  die Aussage bereits gemacht ist.