Klausur Operations Research WS 2021/2022

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski 18.02.2022

<u>Hinweise:</u>

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Geodreieck (nicht unbedingt nötig)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 25 BE.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: 10 BE

Stellen Sie ein Simplex-Lösungstableau für das folgende Optimierungsproblem auf und bestimmen Sie eine erste zulässige Lösung. Geben Sie für Ihre Lösung die Werte aller Variablen, auch der zusätzlichen Variablen, die Sie für das Lösungstableau brauchen, sowie den Wert der Zielfunktion an. Geben Sie auch an, ob die von Ihnen gefundene Lösung optimal ist.

$2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -1$

$3x_1 + x_2 \geq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{min!}$

Aufgabe 2: 10 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \;\leq 10$

$-3\,x_1 - \;2\,x_2 + \;x_3 \;\geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \;\;\geq 0$

$z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow$ max!

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt:

	x_1	x_2	x_3	x_4 (SV I)	x_5 (SV II)	x_6 (KV II)	RS
	1	0,8	0	0,1	0,3	-0,3	0,7
	0	0,4	1	0,3	-0,1	0,1	3,1
-z	0	-0,2	0	-0,4	-0,2	0,2	-3,8

a) Geben Sie die optimale Lösung für die Variablen x_1, x_2, x_3 an. 1 BE

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich der Koeffizient von x_3 in der Zielfunktion sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. 5 BE

c) Ermitteln Sie, in welchem Bereich die rechte Seite für die erste Ungleichung sein darf, ohne dass ein Basiswechsel für die optimale Lösung erforderlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. 4 BE

Aufgabe 3: 10 BE

Geben ist folgendes Optimierungsproblem:

$3\,x_1 \;-\; x_2 \geq 70$

$2\,x_1 \;+\; x_2 \;= 200$

$x_1, x_2 \;\geq 0$

$z = x_1 - 2\,x_2 \rightarrow \max!$

a) Geben Sie das äquivalente duale Problem in derselben Darstellungsweise an. 5 BE

b) Stellen Sie für das duale Problem ein Tableau auf, sodass der Simplexalgorithmus damit arbeiten kann! 5 BE

Aufgabe 4:

7 BE

Geben ist das folgende Optimierungsproblem:

$2 x_1 - x_2 + 3 x_3 <= 10$ oder $- x_1 - 2 x_2 + 3 x_3 >= 10$

$4 x_1 + 2 x_2 + x_3 <= 100$

$x_1, x_2, x_3 >= 0$

$z = x_1 + 2 x_2 + 3 x_3$ -> max!

Transformieren Sie das in ein Ungleichungssystem, das auf Alternativen verzichtet, sondern das ausschließlich aus Restriktionen besteht, die gleichzeitig gelten müssen. Geben Sie auch die Definitionsbereiche aller Variablen an und bestimmen Sie einen zulässigen Wert für die Konstante M. Sie müssen für M nicht die geringstmögliche Konstante nehmen, sollten aber begründen, warum die von Ihnen gewählte funktioniert.

Aufgabe 5: 8 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots d_1, d_2, d_3 zu Tankstellen t_1, t_2, t_3, t_4 zu transportieren.

Die Transportkosten sind die linken oberen Zahlen in jedem Feld: An Stelle (i,j) stehen die Kosten in EUR, die der Transport eines hl von d_i nach t_j kostet.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
d_1	1 *60*	2 *40*	3	5	5	
d_2	6	7 *20*	8 *60*	9	10 *20*	
d_3	6	9	10	12 *60*	11 *40*	

Jedes Depot habe einen Vorrat von 100 hl und jede Tankstelle einen Bedarf von 60 hl.

Die kursiven Zahlen geben eine Lösung an: An Stelle (i,j) steht die Menge von Treibstoff, der von d_i nach t_j geliefert werden soll.

a) Berechnen Sie die Gesamtkosten dieses Transports. 2 BE

b) Berechnen Sie mit der Stepping-Stone-Methode, ob es etwas bringt, Treibstoff von d_3 nach t_1 zu liefern. Falls es billiger wird, dann geben Sie einen neuen Belieferungsplan an, der die maximale Verbesserung nach dieser Methode für dieses Feld erreicht. 5 BE

c) Überprüfen Sie die Lösung von b) durch die Angabe der neuen Gesamtkosten. 1 BE

Aufgabe 6: 5 BE

Eine Hochschule will ihre Mitarbeiter und Studierenden sowie Passanten gegen Corona impfen. Zur Verfügung stehen 150 Impfdosen und ein Zeitraum von 20 Impfstunden, die durch das medizinische Personal parallel praktiziert werden. Die Impfung dauert aufgrund des unterschiedlichen Aufklärungsbedarfs 10 Minuten für einen Mitarbeiter, 15 Minuten für einen Studierenden sowie 30 Minuten für einen Passanten. Die bisher genannten Zahlen sind auf jeden Fall zu beachten.

Als wünschenswert aber nicht unbedingt einzuhalten gilt die Vorgabe, dass mindestens 100 Studierende geimpft werden, mindestens 20 Mitarbeiter und mindestens 10 Passanten.

Geben Sie eine Modellierung mit der Gewichtungsmethode an, die man einem linearen Optimierungsalgorithmus zur Lösung geben könnte. Dabei soll in der Zielfunktion die Einhaltung der weichen Kriterien für die Impfzahlen für alle Personen gleich wichtig sein.

Führen Sie alle Variablen ein, welche die Gewichtungsmethode mit dieser Zielfunktion vorschreibt und stellen Sie alle Ungleichungen und Gleichungen auf, die sich aus diesem Text hier ergeben.

Hinweis: Sie müssen das Problem nur in gewünschter Form modellieren, aber nicht lösen.