# Klausur Operations Research SS 2021

## Prof. Dr. Sebastian Iwanowski 20.08.2021

**Hinweise:**

**Bearbeitungszeit:** 90 Minuten

**Erlaubte Hilfsmittel:** Taschenrechner, Geodreieck (nicht unbedingt nötig)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 25 BE.

Viel Erfolg!

## Aufgabe 1: 11 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Ein Unternehmen möchte einen langfristigen Jahresstromvertrag mit verschiedenen Anbietern machen. Der Anbieter Sonnenkraft produziert Solarstrom für 35 ct /kwh. Die Mindestabnahmemenge ist 30 000 kwh. Der Anbieter Energiediscount produziert Strom aus verschiedenen Quellen für 25 ct/kwh. Energiediscount verlangt eine Mindestabnahmemenge von 10 000 kwh, kann aber gar nicht mehr als 30 000 kwh zu diesem Preis anbieten. Das Unternehmen braucht mindestens 50000 kwh im Jahr. Aus Umweltschutzgründen soll mindestens doppelt so viel Strom von Sonnenkraft eingekauft werden wie von Energiediscount. Von wem soll das Unternehmen wie viel Strom kaufen, um die Kosten zu minimieren?

a) Definieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem aus linearen Ungleichungen und Zielfunktion, das genau diese Aufgabe beschreibt!
Hinweis: Vergessen Sie keine noch so triviale Ungleichung, welche die von Ihnen eingeführten Variablen erfüllen müssen! 4 BE

b) Lösen Sie das Problem graphisch, indem Sie die zulässige Lösungsmenge skizzieren (mit genauer Angabe der Grenzgleichungen) und die optimale Lage der Zielfunktion einzeichnen. 5 BE

c) Bestimmen Sie dann die optimalen Werte für die Strombestellungen durch genaue Berechnung des optimalen Punktes, den Sie graphisch in b) bestimmt haben. 2 BE

.

**Aufgabe 2:** 7 BE

Stellen Sie ein Simplex-Lösungstableau für das folgende Optimierungsproblem auf und bestimmen Sie eine erste zulässige Lösung. Geben Sie für Ihre Lösung die Werte aller Variablen, auch der zusätzlichen Variablen, die Sie für das Lösungstableau brauchen, sowie den Wert der Zielfunktion an. Geben Sie auch an, ob die von Ihnen gefundene Lösung optimal ist.

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \leq 10$$

$$-3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max!$$

### Aufgabe 3: 2 BE

Wenn das Simplexverfahren zu einer gegebenen Aufgabenstellung das folgende Tableau erhält, welche Aussage können Sie über die Menge der optimalen Lösungen treffen? Begründen Sie Ihre Antwort!

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 1 | 0 | 0 | 2 | -5 | 10 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -3 | 7 |
| -z | -3 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 | -10 |

**Aufgabe 4:** 6 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$-2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1$

$3x_1 + x_2 \geq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min!$

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ (SV I) | $x_5$ (SV II) | $x_6$ (KV II) | RS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 5/3 | 2 | 1 | -2/3 | 2/3 | 13/3 |
| | 1 | 1/3 | 0 | 0 | -1/3 | 1/3 | 5/3 |
| z | 0 | -11/3 | 0 | 0 | -1/3 | 1/3 | 5/3 |

a) Geben Sie die optimale Lösung für die Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ an. 1 BE

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich der Koeffizient von $x_2$ in der Zielfunktion sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. 3 BE

c) Ermitteln Sie, in welchem Bereich die rechte Seite für die erste Ungleichung sein darf, ohne dass ein Basiswechsel für die optimale Lösung erforderlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. 2 BE

**Aufgabe 5:** 8 BE

Geben ist folgendes Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 &\leq 70 \\
2x_1 + x_2 &\geq 200 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \text{min!}$

a) Geben Sie das äquivalente duale Problem in derselben Darstellungsweise an. 4 BE

b) Stellen Sie für das duale Problem ein Tableau auf, sodass der Simplexalgorithmus damit arbeiten kann! 4 BE

**Aufgabe 6:** 3 BE

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$-x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$z = x_2 \rightarrow \max!$

Mit dem normalen Simplexalgorithmus, der auf Ganzzahligkeit keine Rücksicht nimmt, kommt folgende Endtabelle heraus:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | RS |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0,5 | -0,5 | 3 |
| | 0 | 1 | 0,25 | 0,25 | 2,5 |
| - z | 0 | 0 | -0,25 | -0,25 | -2,5 |

Testen Sie oben als Alternative die Belegung $x_1$=2 und $x_2$=2.

Was können Sie über die optimale Lösung des oben genannten Problems aussagen?

**Aufgabe 7:** 8 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots $d_1$, $d_2$, $d_3$ zu Tankstellen $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ zu transportieren.

Die Transportkosten sind die linken oberen Zahlen in jedem Feld: An Stelle (i,j) stehen die Kosten in EUR, die der Transport eines hl von $d_i$ nach $t_j$ kostet.

| | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ 0 | 1 *60* | 2 *40* | 3 | 5 | 5 | |
| $d_2$ 5 | 6 | 7 *20* | 8 *60* | 9 | 10 *20* | |
| $d_3$ 6 | 6 | 9 | 10 | 12 *60* | 11 *40* | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Jedes Depot habe einen Vorrat von 100 hl und jede Tankstelle einen Bedarf von 60 hl.

Die kursiven Zahlen in den Transportfeldern geben eine Lösung an: An Stelle (i,j) steht die Menge von Treibstoff, der von $d_i$ nach $t_j$ geliefert werden soll.

Die Zahlen in den Depotfeldern geben die Werte $u_i$ an, welche nach der MODI-Methode berechnet wurden.

a) Berechnen Sie die Werte $v_j$ für die Tankstellenfelder nach der MODI-Methode. 3 BE

b) Berechnen Sie mit der MODI-Methode für jedes Transportfeld, das im Moment nicht genutzt wird, die Erhöhung bzw. Erniedrigung der Kosten in EUR pro hl. 2 BE

c) Führen Sie die Verbesserung für das beste in b) gefundene Feld durch und geben Sie an, wie viele hl über diese Verbindung transportiert werden sollten und was die Gesamtverbesserung in EUR ist. 3 BE

## Aufgabe 8: 5 BE

Die Studierenden Anton, Berta, Cäsar und Dora ziehen in eine WG mit 4 Zimmern. Jeder gibt an, mit welcher Präferenz er in welches Zimmer ziehen will. Die Werte sind in der folgenden Tabelle eingetragen:

| | Z1 | Z2 | Z3 | Z4 |
|---|---|---|---|---|
| Anton | 1 | 5 | 8 | 5 |
| Berta | 2 | 6 | 7 | 5 |
| Cäsar | 3 | 7 | 6 | 2 |
| Dora | 5 | 8 | 5 | 1 |

Finden Sie eine eindeutige Zuordnung zwischen den Studierenden und den Zimmern, welche die Präferenzen maximiert[1], mit Hilfe der ungarischen Methode.
Andere Methoden werden hier **nicht** akzeptiert.

Hinweis: Verwenden Sie für die Zwischenschritte die unten angegebenen Tabellenvorlagen. Die Vorlagen geben mehr Zwischenschritte an, als Sie brauchen.

| 1) | Z1 | Z2 | Z3 | Z4 |
|---|---|---|---|---|
| Anton | | | | |
| Berta | | | | |
| Cäsar | | | | |
| Dora | | | | |

2)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Anton | | | | |
| Berta | | | | |
| Cäsar | | | | |
| Dora | | | | |

3)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Anton | | | | |
| Berta | | | | |
| Cäsar | | | | |
| Dora | | | | |

4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Anton | | | | |
| Berta | | | | |
| Cäsar | | | | |
| Dora | | | | |

5)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Anton | | | | |
| Berta | | | | |
| Cäsar | | | | |
| Dora | | | | |

[1] Achtung: Hierfür ist eine Vorverarbeitung notwendig!