Klausur Operations Research WS 2020/2021

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

05.03.2021

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Geodreieck, ausgeteilte Zusammenfassung

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE, wenn Sie diese Klausur als eigenständige Prüfungsleistung schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: 9 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Eine Rösterei will verschiedene Kaffeeprodukte für den Verbraucher produzieren. Es stehen täglich zwei Rohprodukte zur Verfügung: 3 t Arabica und 4 t Robusta. Insgesamt kann die Rösterei 4 t Rohprodukt am Tag verarbeiten. Die Verarbeitung von 1 t Arabica bringt einen Gewinn von 2000 EUR, die von 1 t Robusta einen Gewinn von 1000 EUR. Es soll mindestens 500 kg mehr Robusta als Arabica verarbeitet werden. Es soll ein Tagesprogramm für den maximalen Gewinn erarbeitet werden.

a) Definieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem aus linearen Ungleichungen und einer Zielfunktion, das genau diese Aufgabe beschreibt! (3 BE)
Hinweis: Vergessen Sie keine noch so triviale Ungleichung, welche die von Ihnen eingeführten Variablen erfüllen müssen!

b) Lösen Sie das Problem graphisch, indem Sie die zulässige Lösungsmenge skizzieren (mit genauer Angabe der Grenzgleichungen) und die optimale Lage der Zielfunktion einzeichnen. (4 BE)

c) Bestimmen Sie dann die optimalen Werte inklusive des Gewinns durch genaue Berechnung des optimalen Punktes, den Sie graphisch in b) bestimmt haben. (2 BE)

Aufgabe 2: 7 BE

Stellen Sie ein Simplex-Lösungstableau für das folgende Optimierungsproblem auf und bestimmen Sie eine erste zulässige (nicht notwendig optimale) Lösung. Geben Sie für diese Lösung die Werte aller Variablen, auch der zusätzlichen Variablen, die Sie für das Lösungstableau brauchen, sowie den Wert der Zielfunktion an:

$2x_1 + x_2 \leq 5$

$3x_1 - x_2 \leq -5$

$x_1, x_2 \geq 0$

$z = 10x_1 + x_2 \rightarrow \min!$

.

Aufgabe 3: 5 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$z = 2\,x_1 + 3\,x_2 \rightarrow \min!$

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt, wobei die Nummerierung der Schlupfvariablen der Reihenfolge der obigen Gleichungen entspricht:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	0	0	1	0	1	30
	0	1	0	1	0	30
	1	1	0	0	-1	20
z	0	-1	0	0	-2	40

a) Setzen Sie in die linke Spalte die Basisvariablen ein und geben Sie die optimale Lösung an, indem Sie den Wert aller beteiligten Variablen angeben. (2 BE)

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich der Koeffizient von x_2 in der Zielfunktion sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert. Geben Sie den Bereich für den Koeffizienten selbst an, nicht nur die Abweichung epsilon. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. (3 BE)

Aufgabe 4: 10 BE

Geben ist folgendes Optimierungsproblem:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\geq 7 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 20 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 30
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max!$

a) Geben Sie das äquivalente duale Problem in derselben Darstellungsweise an.

b) Stellen Sie für das duale Problem das vollständige Tableau auf, sodass der Standard-Simplexalgorithmus damit arbeiten kann.

Aufgabe 5: 4 BE

Geben ist das folgende Optimierungsproblem, welches im Folgenden als „ursprüngliche Aufgabe“ bezeichnet wird:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$x_2 - x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ x_2 \in \mathbb{N}$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max!$$

Das folgende Tableau wurde von einem Simplexverfahren ermittelt, das die Ganzzahligkeit der Lösung nicht berücksichtigen kann, wobei die Nummerierung der Schlupfvariablen der Reihenfolge der obigen Gleichungen entspricht:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
	1/3	0	1	1/3	-1/3	10/3
	1/3	1	0	1/3	2/3	40/3
- z	-2/3	0	0	-5/3	-1/3	-110/3

a) Geben Sie 2 Aufgaben an, welche dem Simplexverfahren als nächste gestellt werden müssen, damit eine optimale Lösung für die ursprüngliche Aufgabe gefunden werden kann. Spezifizieren Sie beide Aufgaben vollständig in derselben Weise, wie die ursprüngliche Aufgabe dargestellt ist.

b) Wenn Sie die Aufgaben aus a) richtig spezifiziert haben und danach lösen (was hier aus Zeitgründen nicht gemacht werden soll), dann würden Sie feststellen, dass die eine Aufgabe nicht lösbar ist, während die andere eine ganzzahlige Lösung als optimale besitzt. Was können Sie dann über die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe aussagen?

.

Aufgabe 6: 5 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots d_1, d_2, d_3, d_4 zu Tankstellen t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 zu transportieren.

Die Transportkosten (in EUR pro hl), Vorräte (hl) und Bedarfe (hl) sind folgendermaßen:

	Vorräte	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Bedarfe:		120	60	80	80	60
d_1	100	6	7	8	2	3
d_2	100	4	5	9	3	9
d_3	100	7	10	6	10	7
d_4	100	6	4	8	4	5

Die praktische Aufgabenstellung besteht darin, einen Belieferungsplan zu erstellen, der die Transportkosten minimiert.

Hugo fängt mit folgender Eröffnungslösung an:
d1 liefert 30 hl an t1 und 70 hl an t4
d2 liefert 60 hl an t2 und 40 hl an t3
d3 liefert 40 hl an t3 und 60 hl an t5
d4 liefert 90 hl an t1 und 10 hl an t4

a) Geben Sie an, warum diese Eröffnungslösung nicht zulässig ist. (2 BE)

b) Erstellen Sie eine zulässige Eröffnungslösung nach der Matrixminimummethode. Sie können die Lieferungen entweder in derselben Form wie Hugos Lösung unten eintragen oder aber oben in der Tabelle. Kennzeichnen Sie auf jeden Fall alle Basislösungen, auch wenn nichts geliefert wird. (3 BE)